# Zum relativistischen Mehrkörperproblem der Quantenmechanik

(Der Dreiteilchenfall)

von

HERBERT PFISTER

München

1962

# Zum relativistischen Mehrkörperproblem der Quantenmechanik

(Der Dreiteilchenfall)

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Herbert Pfister

München, im April 1962

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Berichterstatter: Professor Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1962

Fotodruck: Mikrokopie G.m.b.H. München 2, Weinstr. 4

Inhalt.

Einführung . . . . . 1

§1. Integration der Dreiteilchengleichung . . . . . 12

§2. Die Eigenwertgleichung für die Schwerpunktsbewegung . . 26

§3. Zur Raum-Zeitstruktur der Lösungen . . . . . 39

§4. Streuprozesse nach der Dreiteilchengleichung . . . . . 52

§5. Zur Interpretation von Mehrzeitfunktionen . . . . . 61

Anhang . . . . . 71

Literaturverzeichnis . . . . . 74

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

# E I N F Ü H R U N G

Während die nichtrelativistische Quantenmechanik eine in sich abgeschlossene und konsistente Theorie darstellt, die in ihrem gesamten Anwendungsbereich experimentell bestätigte Ergebnisse liefert, gibt es heute noch keine befriedigende Erweiterung dieser Theorie, die dem Relativitätsprinzip genügt.

Die bisherigen Ansätze in dieser Richtung können fast ausnahmslos unter dem Stichwort 'Quantenfeldtheorie' eingeordnet werden. Es wird darin versucht, eine relativistische Quantentheorie korrespondenzmäßig aus der klassischen relativistischen Theorie zu erhalten, so wie die Quantenmechanik durch Begriffsumdeutung aus der Newtonschen Mechanik hervorging. Dabei steht man jedoch vor der Schwierigkeit, daß das relativistische Mehrkörperproblem in der klassischen Physik zunächst keinen Platz hat, weil in ihr Wechselwirkungen zwischen räumlich getrennten Teilchen durch den Begriff der (Fern-) Kraft charakterisiert werden, der dem relativistischen Prinzip einer nur endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wirkungen widerspricht. Nun gelang es Maxwell, diese Schwierigkeit im Rahmen der klassischen Physik mit Hilfe des Konzepts des elektromagnetischen Feldes weitgehend zu überwinden, nämlich in all den Fällen, in denen eine Rückwirkung der materiellen Teilchen auf das Feld nicht berücksichtigt werden braucht. Es lag demnach nahe, die korrespondierende Quantentheorie dadurch zu gewinnen, daß man das elektromagnetische Feld (und zugleich die der Diracgleichung bzw. der Klein-Gordongleichung genügenden klassischen Materiefelder)

quantisiert [Dirac (1927a,b); Jordan, Klein (1927); Heisenberg, Pauli (1929); Pauli, Weißkopf (1934)].

Als man aber diese relativistische Quantenfeldtheorie auf konkrete Elementarteilchenprozesse anwendete, stellte sich heraus, daß man in beinahe allen Fällen divergierende Resultate erhielt, weil die "Rückwirkung" der verschiedenen Felder aufeinander in der Elementarteilchenphysik nicht annähernd vernachlässigt werden darf. Nachdem auch durch konsequent relativistische Behandlung [Schwinger (1948)] und durch mathematisch exaktere Neuformulierungen [Lehmann, Symanzik, Zimmermann (1955); Wightman (1956); Schmidt, Baumann (1956); Hall, Wightman (1957)] die Schwierigkeiten nicht beseitigt werden konnten und außerdem gezeigt wurde, daß sie ihren Ursprung nicht allein in der Störungsrechnung haben [Källén (1952); Lehmann (1954)], muß man damit rechnen, daß die Divergenzen in dem physikalischen Konzept der Quantenfeldtheorie selbst begründet liegen. Es ist also möglicherweise doch ungeeignet, eine relativistische Mehrteilchen-Quantentheorie korrespondenzmäßig auf der durch ein (elektromagnetisches) Feld vermittelten klassischen Wechselwirkung von Materieteilchen aufzubauen. Zudem scheint die Ausdehnung der Heisenbergschen Quantenpostulate auf Felder $\varphi(x)$, die unendlich viele Freiheitsgrade haben und nicht unmittelbar physikalische Größen repräsentieren, ganz allgemein zu mathematischen Inkonsistenzen zu führen [van Hove (1952); Gårding, Wightman (1954a,b); Wightman, Schweber (1955); Haag (1955); Wightman (1957)]

Angesichts dieser Problematik der in der Literatur diskutierten Elementarteilchentheorien scheint es gerechtfertigt, den korrespondenzmäßigen Weg zu verlassen und mehr oder weniger phänomeno-

logisch - freilich unter Berücksichtigung der Prinzipien der Quantentheorie und der Relativität - nach einem Modell für die Wechselwirkung von Elementarteilchen zu suchen. Man wird dabei zunächst ein Partikelmodell trotz der dagegen erhobenen Einwände [z.B. Hund (1954), speziell Ziffern 47 und 108] einem Feldmodell vorziehen, weil einerseits in vielen Fällen die formale Äquivalenz beider Bilder bewiesen ist [Landau, Peierls (1930); Fock (1932); Furry, Oppenheimer (1934); Becker, Leibfried (1949); Günther (1952); Wightman, Schweber (1955)], andrerseits für Untersuchungen, die nur die grundsätzliche Brauchbarkeit eines solchen Modells betreffen, die Mitnahme aller denkbaren Konfigurationen - wie es in der Feldtheorie geschieht - unnötiger Ballast ist, der zu zusätzlichen mathematischen Schwierigkeiten führt.

Unter diesen Gesichtspunkten hat Bopp kürzlich ein Modell einer Elementarteilchentheorie vorgeschlagen und für den Zweiteilchenfall ausführlich diskutiert [Bopp (1958)]. Es wird darin versucht, alle Elementarteilchen in einheitlicher Weise durch "Fusion" aus einer Art Urmaterie aufzubauen und ihnen zugleich in höherem Maß innere (Struktur-) Eigenschaften zu verleihen als das üblicherweise bei den sogen. nackten Teilchen der Quantenfeldtheorie geschieht. Die Idee einer derartigen Fusion wurde - allerdings von einem weniger grundsätzlichen Standpunkt aus - schon früh von de Broglie ausgesprochen [de Broglie (1932)] und von Wentzel (1934), Jordan (1935, 1936a,b), Kronig (1935a,b,c, 1936), Sokolow (1937) und Pryce (1937, 1938) weiter ausgearbeitet. Die Boppsche Theorie geht aber weit über die früheren diesbezüglichen Ansätze hinaus, indem sie nicht nur kinematisch die Eigenschaften der fusionierten

Teilchen als Folge der Eigenschaften der "Urmaterie" beschreibt, sondern den Fusionsvorgang selbst anhand einer Differentialgleichung studiert. Man darf freilich diese Fusion dennoch nicht so sehr als anschauliche Bindung im Sinne der nichtrelativistischen Schrödingergleichung mit anziehendem Potential verstehen, sondern als eine möglicherweise adäquate Beschreibung von Elementarteilchen durch mehrere Variable, die die beobachteten Wechselwirkungen auf einer möglichst universellen Basis darstellt [vgl. Jordan (1935)]. Der Einschluß einer Dynamik der Fusion im Boppschen Modell hat den großen Vorteil, daß nun auf derselben einheitlichen Grundlage auch die Streuprozesse zwischen Elementarteilchen behandelt werden können, wodurch eine unmittelbare Verknüpfung mit experimentellen Meßergebnissen möglich ist.

Zur relativistisch invarianten Formulierung der dynamischen Fusionstheorie wird bei Bopp für jedes Teilchen eine eigene Zeitvariable eingeführt, ein Vorgehen, das erstmals von Dirac (1932) vorgeschlagen und dann u.a. von Dirac, Fock, Podolsky (1932), Wentzel (1933a,b), Tomonaga (1946) und Salpeter, Bethe (1951) auf die verschiedensten Probleme angewendet wurde. Es stellte sich dabei heraus, daß die Mehrzeittheorie nicht allein ein bequemes Hilfsmittel ist, um physikalische Gleichungen formal loretzinvariant zu schreiben, sondern daß sich in ihr sogar einige Divergenzen, z.B. die der Eigenkraft des Elektrons vermeiden lassen [Wentzel (1933a)]. Auch die Wahrscheinlichkeitsinterpretation einer Mehrzeitfunktion $\psi(x_1, t_1, \ldots x_n, t_n)$ wurde durch Dirac, Fock, Podolsky (1932) und vor allem durch Bloch (1934) weitgehend aufgeklärt. Trotzdem hat der Mehrzeitformalismus bisher noch keine konsequente Anwendung in der relativistischen Physik gefunden, vor allem ist

sein Zusammenhang mit einzeitigen Theorien noch ganz unklar [vgl. Dyson (1953); Wick (1954); Królikowski, Rzewuski (1955)].

Die universelle Wechselwirkung zwischen den "Urteilchen", die zur Fusion und zu Streuvorgängen Anlaß geben soll, wird bei Bopp als rein lokale Zweikörperwechselwirkung gewählt. Das sollte jedenfalls für eine erste Untersuchung der Eigenschaften und der Brauchbarkeit dieser Elementarteilchentheorie ausreichen, zudem nichtlokale Ansätze, die dem Relativitätsprinzip genügen, notwendig eine sehr unanschauliche Gestalt haben und erhebliche mathematische Komplikationen mit sich bringen (etwa in der Bethe-Salpetergleichung, die allerdings außer der nichtlokalen Wechselwirkung auch eine mit der Zahl der Teilchen steigende Ordnung hat, während die Gleichungen bei Bopp sämtlich linear sind). Neben dieser Spezialisierung im Ortsraum wird weiter angenommen, daß die Wechselwirkung bzgl. der möglichen diskreten Quantenzahlen nur im Spinraum operiert (das "Urteilchen" muß notwendig einen Spin tragen, wenn man auf seiner Grundlage einen weiten Teil der Elementarteilchenphysik erfassen will; vgl. Dürr, Heisenberg u.a. (1959)). Bei Berücksichtigung der Lorentzinvarianz reduziert sich der Ansatz dann auf fünf fundamentale Wechselwirkungskonstanten, die durch den Vergleich der theoretischen Resultate mit experimentellen Massen und Wirkungsquerschnitten bestimmt werden sollten. Dabei haben wir allerdings stillschweigend schon von einer weiteren, ganz wesentlichen Einschränkung in der Boppschen Mehrkörpertheorie Gebrauch gemacht, nämlich, daß die Gleichung in die zu den verschiedenen Teilchenzahlen gehörigen Anteile zerfällt, d.h. daß die Wechselwirkung nicht zwischen Zuständen mit verschiedener Zahl von "Urteilchen" vermittelt.

Danach ist die Einteilchengleichung mit der vierkomponentigen Neutrinogleichung identisch. Die Zweiteilchengleichung, die von Bopp (1958), Neuburger (1960) und Rinke (1961) in Einzelheiten untersucht wurde (entfernt verwandte Untersuchungen sind von Eddington (1928, 1929) und Thirring (1950) angestellt worden), führt zur Fusion von zwei "Urteilchen" (Neutrinen) zu einem neuen Teilchen ohne räumliche Struktur, das sich je nach seinem Symmetriecharakter gemäß der Maxwellgleichung oder der fünfkomponentigen Wellengleichung für skalare Teilchen (Mesonen) durch Raum-Zeit bewegt, ein Ergebnis, das unter spezielleren Voraussetzungen bereits von de Broglie (1933) bzw. Belinfante (1939a,b) gefunden wurde. Die Streuung von zwei Neutrinen, die ebenfalls mit der Zweiteilchengleichung behandelt werden kann, ergibt wegen der lokalen Wechselwirkung den Wirkungsquerschnitt Null.

Der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik der fusionierten Teilchen ist in der Boppschen Theorie automatisch gewährleistet, wenn man für die Neutrinen Fermistatistik fordert; denn physikalische Teilchen, die durch Fusion einer ungeraden (geraden) Anzahl von Neutrinen entstehen, haben halb-(ganz-)zahligen Spin, und eine bzgl. der Neutrinen vollständig antisymmetrische Wellenfunktion ändert bei Permutation einer ungeraden (geraden) Anzahl von Neutrinen ihr Vorzeichen (nicht). Aber auch in einer auf ähnlicher Basis aufbauenden Quantenfeldtheorie, in der der Spin-Statistik-Zusammenhang aus dem Formalismus ableitbar ist [Pauli (1936, 1940)] und sich in (Anti-) Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren ausdrückt dürften diesbezüglich keine Schwierigkeiten auftreten [Jordan (1935, 1936c)].

Schließlich sollte man noch darauf eingehen, inwieweit die Boppsche Theorie prinzipiell alle beobachteten Prozesse zwischen Elementarteilchen beschreiben wird können und wie sie die schwerwiegenden Einwände gegen jede relativistische Partikeltheorie [siehe z.B. Heisenberg, Pauli (1929); Hund (1954), speziell Ziffern 47 und 108] umgeht: Das charakteristischste Phänomen der hochenergetischen (relativistischen) Elementarteilchenphysik ist die Materieumwandlung und -erzeugung, und gerade diese kann i.a. in eine Partikeltheorie nicht eingebaut werden. Bei Bopp sind jedoch dadurch, daß jedes physikalische Teilchen durch eine spezielle Neutrinenkonfiguration dargestellt wird und nur die Gesamtzahl der Neutrinen konstant bleiben soll, Umwandlungen in reichem Maß möglich (z.B. ist die Umwandlung eines Lichtquants in zwei Neutrinen mit der Teilchenzahlkonstanz verträglich, wenn auch vielleicht wegen anderer Erhaltungssätze ausgeschlossen, ebenso der "Zerfall" eines Elektrons in ein Lichtquant und ein Neutrino, falls man das Elektron durch eine Dreineutrinenkonfiguration beschreibt, und andere realistischere Prozesse mehr). Andrerseits sind Elementarprozesse wie die Emission von Photonen bei der Elektron-Elektron-Streuung oder die Erzeugung von zusätzlichen $\pi$-Mesonen bei der Pion-Nukleonstreuung genügend hoher Energie wegen der dazu erforderlichen Veränderung der Neutrinenzahl aus der Boppschen Theorie in ihrer gegenwärtigen Formulierung sicher ausgeschlossen - sofern man nicht annehmen will, daß ein und dasselbe Elementarteilchen je nach Prozeß durch verschiedene Neutrinokonfigurationen oder durch ein Gemisch von solchen beschrieben wird.

In der vorliegenden Arbeit soll nun das Dreiteilchenproblem nach der Boppschen Theorie behandelt werden. Es ist zu erwarten, daß dabei ganz neue Eigenschaften des Modells zutage treten: Bekanntlich führt in jedem quantenmechanischen System, zwischen desse Teilchen "klassische Kräfte" herrschen, das Pauliprinzip zu zusätzlichen (Austausch-) Kräften, sobald nur mehrere gleiche Teilchen vorhanden sind. Befinden sich also von drei Neutrinen zwei am selben Ort, so besteht zwischen ihnen nach Bopp eine lokale Wechselwirkung. und das dritte Neutrino könnte durch Austauschkraft einen stabilen Verband mit ihnen eingehen, auch wenn es räumlich von ihnen getrennt ist. Wenn man auf diese Weise durch Fusion "ausgedehnte" Teilchen mit innerer Struktur (Teilchen mit Eigenfeld) aufbauen kann, darf man sich davon einen großen Fortschritt in der Elementarteilchenphysik erwarten; denn ein Elementarteilchen kann durch die Angabe von Masse, Spin und etwaigen anderen Quantenzahlen zwar insoweit charakterisiert werden, daß es von anderen Teilchen unterschieden werden kann, aber es ist klar, daß damit seine physikalisch wesentlichsten Eigenschaften, nämlich seine Wechselwirkungsmöglichkeiten noch gar nicht erfaßt sind. Diese müssen z.B. im Falle der elektromagnetischen Kräfte zwischen zwei Elektronen in der Quantenfeldtheorie in so künstlicher Weise dargestellt werden, daß ein "nacktes" Elektron erst durch die Anwesenheit eines zweiten zum Austausch von virtuellen Lichtquanten "angeregt" wird.

Wenn es aber gelingt, z.B. ein Elektron (durch Fusion aus drei Neutrinen) in einer solchen Weise mathematisch zu erfassen, daß es sich bzgl. seiner Schwerpunktsbewegung wie ein Teilchen mit Spin 1/2 und Masse $m_e$ ($\approx 0{,}9 \cdot 10^{-27}$g.) verhält (also der zugehörigen Diracgleichung genügt), außerdem aber eine räumliche Struktur besitzt,

die asymptotisch als Coulombfeld interpretiert werden kann, dann ist zu erwarten, daß man die Kräfte zwischen Elektronen auf eine einfachere, logisch befriedigendere Weise darstellen kann, und daß außerdem durch die Ausschaltung des Konzepts der "nackten" Teilchen die Divergenzen der Quantenelektrodynamik eliminiert werden. Ähnliche Möglichkeiten sollten dann prinzipiell für andere Teilchen und Wechselwirkungen bestehen. Die oben erwähnte Struktur eines Coulombfeldes ist dabei so verstanden, daß das Überlappungsintegral zweier Elektronen-"Dichtefunktionen", das ja wegen der lokalen Neutrinen-Wechselwirkung ein Maß für die Wechselwirkungsenergie zweier Elektronen sein sollte, umgekehrt proportional zum Schwerpunktsabstand der Elektronen ist.

Von diesem Programm wird im folgenden die erst Aufgabe vollständig gelöst, d.h. es wird gezeigt, daß die Dreiteilchengleichung der Boppschen Theorie eine Lösung zum Gesamtspin 1/2 besitzt, die bzgl. ihrer Schwerpunktskoordinaten einer Diracgleichung genügt. Die zugehörige Masse wird als Funktion der fünf fundamentalen Wechselwirkungskonstanten berechnet. Die Gleichung besitzt keine Lösung zum Gesamtspin 3/2, was im Hinblick darauf, daß auch experimentell kein Elementarteilchen zum Spin 3/2 bekannt ist (abgesehen von Resonanzzuständen bei starken Wechselwirkungen, die unmöglich durch eine so einfache Neutrinenkonfiguration beschrieben werden können), als besonders hübsches Ergebnis angesehen werden darf.

Die Untersuchung der raum-zeitlichen Struktur dieser Lösung zum Spin 1/2 führt auf ein Integralgleichungssystem. Dieses kann bei spezieller Wahl der Integrationswege gelöst werden, und man erhält so die "Elektron"-Wellenfunktion, zunächst allerdings nur

in formaler Gestalt als Fourierintegral. Die explizite Ausführung des Integrals erweist sich im allgemeinen Fall als sehr schwierig, doch können einige vorläufige Aussagen bereits am Integral selbst oder an der Lösung von Spezialfällen abgelesen werden. Es ist jedenfalls gewiß, daß das Ergebnis hier kein so triviales ist wie im Zweiteilchenfall, wo die Wellenfunktion auf einen Punkt lokalisiert ist. Ob jedoch die Struktur der Dreiteilchenfunktion in der oben erläuterten Weise als Coulombfeld interpretiert werden kann, steht noch nicht fest, weil sich neben dem Integrationsproblem auch noch Schwierigkeiten in der Behandlung der drei unabhängigen Zeitkoordinaten ergeben.

Im einzelnen wird in §1 eine Integrationstechnik für die Boppsche Dreiteilchengleichung ausführlich behandelt. Sie führt zwar nicht zur allgemeinsten Lösung, doch zeigt ein Vergleich mit dem Zweiteilchenfall, daß der so erhaltene Lösungstyp unseren physikalischen Vorstellungen wahrscheinlich am besten angepaßt ist. Die Integrationsmethode ist unmittelbar auf mehr als drei Teilchen übertragbar. Das Eigenwertproblem wird in §2 gelöst, d.h. es werden die für einen Dreineutrinenverband in Frage kommenden Massen als Funktionen der in die Theorie eingehenden Wechselwirkungskonstanten bestimmt. Für die Schwerpunktsbewegung ergibt sich die zur Teilchenmasse gehörige Diracgleichung. §3 beschäftigt sich mit der besonders interessanten Frage der inneren Struktur dieser möglichen Elementarteilchen. In §4 sind einige vorläufige Aussagen zur Streuung eines Neutrinos an einem fusionierten Paar (z.B. einem Lichtquant) zusammengestellt. Unter der Randbedingung einer einfallenden Welle werden nach den Methoden von §1 und §2 Lösungen konstruiert, und

es kann wahrscheinlich gemacht werden, daß man einen endlichen Wirkungsquerschnitt erhält. Dieses Ergebnis hat freilich vorerst mehr formalen Charakter, weil die Deutung der Raumzeitstruktur der Lösungen (als auslaufende Kugelwellen) denselben Schwierigkeiten wie in §3 begegnet. Schließlich wird im letzten Paragraphen nochmal in allgemeinerem Zusammenhang auf die raumzeitliche Struktur von Mehrteilchenwellenfunktionen eingegangen, besonders darauf, welche Abhängigkeit von den Relativzeiten nach der Blochschen Interpretation [Bloch (1934)] zu erwarten ist und wie sich diese mit unseren Ergebnissen verträgt. Einige Ergebnisse zum Zweiteilchenfall, die in dieser Hinsicht von Interesse sind, werden mitgeteilt.

## §1. Integration der Dreiteilchengleichung.

Die Wellengleichung des relativistischen Dreikörperproblems der Quantenmechanik, die in dieser Arbeit eingehend untersucht werden soll, hat nach Bopp (1958) die Gestalt:

$$(1)\quad (\gamma_1\partial_1+\gamma_2\partial_2+\gamma_3\partial_3)\psi_{\nu_1\nu_2\nu_3}(y_1,y_2,y_3) = \varepsilon^4\Big\{W_{23}\,\delta(y_2-y_3)\psi_{\nu_1\nu_2\nu_3}\Big(y_1,\tfrac{y_2+y_3}{2},\tfrac{y_2+y_3}{2}\Big) + W_{31}\,\delta(y_3-y_1)\psi_{\nu_1\nu_2\nu_3}\Big(\tfrac{y_1+y_3}{2},y_2,\tfrac{y_1+y_3}{2}\Big) + W_{12}\,\delta(y_1-y_2)\psi_{\nu_1\nu_2\nu_3}\Big(\tfrac{y_1+y_2}{2},\tfrac{y_1+y_2}{2},y_3\Big)\Big\}.$$

Dabei hängt die Wellenamplitude $\psi_{\nu_1\nu_2\nu_3}(y_1,y_2,y_3)$ außer von den Vierervektoren $y_i$ noch von den vierwertigen Spinorindizes $\nu_i$ der drei Neutrinos ab, stellt also einen 64-komponentigen Spinor dar. Entsprechend sind z.B. in $\gamma_1\partial_1 \equiv \gamma_1^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu}$ die $\gamma_1^\mu$ die auf den Index $\nu_1$ wirkenden Diracmatrizen und können demnach als Kroneckerprodukte geschrieben werden: $\gamma_1^\mu = \gamma^\mu \times 1 \times 1$. Die vierdimensionalen $\delta$-Funktionen $\delta(y_i-y_k)$ auf der rechten Seite der Gleichung sorgen dafür, daß - anschaulich gesprochen - zwei Neutrinos nur dann in Wechselwirkung stehen, wenn sie sich zur selben Zeit am selben Ort befinden. Die eigentlichen Wechselwirkungsterme $W_{ik}$ sind Matrizen im Spinraum, und zwar wirken sie jeweils nur auf die zwei Indizes $\nu_i$ und $\nu_k$ (Mehrkörperwechselwirkungen sind also ausgeschlossen). Damit Lorentzinvarianz besteht, muß z.B. $W_{23}$ die Gestalt haben:

$$(2)\quad W_{23} = 1\times(\overline{\alpha}_0\, 1\times 1 + \overline{\alpha}_1\gamma^\mu\times\gamma_\mu + \tfrac{1}{2}\overline{\alpha}_2\gamma^{\mu\nu}\times\gamma_{\mu\nu} + \overline{\alpha}_3\gamma^5\gamma^\mu\times\gamma_5\gamma_\mu + \overline{\alpha}_4\gamma^5\times\gamma_5)$$

mit beliebigen Konstanten $\overline{\alpha}_0,\ldots,\overline{\alpha}_4$.

(Es ist dabei $\gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ ; $\gamma^4 = i\gamma_0$ ; $\gamma_{4k} = -i\gamma_4\cdot\gamma_k$ für k,l = 1, . . 5 und k≠l; $\gamma_{4k}=0$ für k=l; der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ habe die Diagonalelemente $-g^{00}=g^{11}=g^{22}=g^{33}=1$). Der Faktor $\varepsilon$ ist eine unendlich kleine Länge im Sinne der Analysis von Schmieden und Laugwitz (1958): $\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} dh = 2\pi$. Auf die Problematik dieses unendlich kleinen Faktors, u.a. bzgl. seiner Lorentzinvarianz soll hier nicht eingegangen werden [vgl. Neuburger (1960)]. Für uns ist nur wesentlich, daß wir in $\varepsilon^4\cdot\delta(\xi)$ eine Funktion haben, die bei $\xi=0$ den Wert 1 besitzt und sonst überall verschwindet, und für die in eindeutiger Weise eine Fouriertransformierte definiert werden kann. Wegen einer phänomenologischen Ableitung der Gleichung (1) sei auf die Arbeit von Bopp (1958) verwiesen. Die Symmetriebedingungen, die gemäß dem Pauliprinzip an $\psi_{123}(y_1,y_2,y_3) \equiv \psi_{\nu_1\nu_2\nu_3}(y_1,y_2,y_3)$ zu stellen sind, werden erst am Ende dieses Paragraphen diskutiert, weil sie für die Integrationstechnik keine Bedeutung haben.

Um nun die Gleichung (1) zu lösen, führen wir die folgende Koordinatentransformation durch:

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3} = X \quad ; \quad y_1 - \frac{y_2+y_3}{2} = x \quad ; \quad y_2 - y_3 = \xi \ .$$

Da in der Wechselwirkung nur Relativkoordinaten vorkommen, kann man die Schwerpunktsbewegung des Dreiteilchensystems als freie Bewegung abspalten:

$$\psi_{123}(y_1,y_2,y_3) = \psi_{123}(x,\xi)\, e^{iPX} \ .$$

Im Zweiteilchenfall war es nun möglich, die verbleibende Differentialgleichung für die Relativbewegung durch Fouriertransformation auf ein einfaches algebraisches Problem zu reduzieren. Das ist hier wegen der größeren Variablenzahl nicht mehr der Fall, und die Inte-

gration ist aus diesem Grund sehr viel mühsamer. Trotzdem sind die durch Fouriertransformation sich ergebenden Integralgleichungen angenehmer zu behandeln als die Differentialgleichung.

$$\psi_{123}(x,\xi) = (2\pi)^{-8} \int dk\, dp\, \tilde{\psi}_{123}(k,p)\, e^{i(kx+p\xi)} .$$

Zur Abkürzung werden noch die Funktionen

$$\begin{aligned} \chi^1(k) &= (2\pi)^{-4} \int dp\, \tilde{\psi}_{123}(k,p) \\ \chi^2(k) &= (2\pi)^{-4} \int dp\, \tilde{\psi}_{123}(p, k+\tfrac{p}{2}) \\ \chi^3(k) &= (2\pi)^{-4} \int dp\, \tilde{\psi}_{123}(p, -k-\tfrac{p}{2}) \end{aligned} \tag{3}$$

eingeführt, die bis auf einen Faktor $e^{iPX}$ die Fouriertransformierten von $\psi_{123}(y_1, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2})$ bzw. $\psi_{123}(\frac{y_2+y_3}{2}, y_2, \frac{y_2+y_3}{2})$ bzw. $\psi_{123}(\frac{y_2+y_2}{2}, \frac{y_2+y_2}{2}, y_3)$ darstellen.

Dann lautet die Dreiteilchengleichung in Fourierkomponenten:

$$\left[(\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1 + (\tfrac{p}{3}-\tfrac{k}{2}+p)\gamma_2 + (\tfrac{p}{3}-\tfrac{k}{2}-p)\gamma_3\right] \tilde{\psi}_{123}(k,p) = -i\varepsilon^4 \left\{ W_{23}\chi^1(k) + W_{31}\chi^2(p-\tfrac{k}{2}) + W_{12}\chi^3(-p-\tfrac{k}{2}) \right\} .$$

Um $\tilde{\psi}_{123}(k,p)$ explizit durch die nur mehr von je einer Variablen abhängigen $\chi^i(k)$ auszudrücken, multipliziert man die Gleichung mit dem Operator:

$$Z_{123}(k,p) = \left[-(\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1 + (\tfrac{p}{3}-\tfrac{k}{2}+p)\gamma_2 + (\tfrac{p}{3}-\tfrac{k}{2}-p)\gamma_3\right] \left[(\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1 - (\tfrac{p}{3}-\tfrac{k}{2}+p)\gamma_2 + (\tfrac{p}{3}-\tfrac{k}{2}-p)\gamma_3\right] \left[(\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1 + (\tfrac{p}{3}-\tfrac{k}{2}+p)\gamma_2 - (\tfrac{p}{3}-\tfrac{k}{2}-p)\gamma_3\right]$$

und erhält:

$$N(k,p)\cdot \tilde{\psi}_{123}(k,p) = i\varepsilon^4 Z_{123}(k,p)\{W_{23}\chi^1(k) + W_{31}\chi^2(p-\tfrac{k}{2}) + W_{12}\chi^3(-p-\tfrac{k}{2})\} \tag{4}$$

mit der Abkürzung:

$$N(k,p) = [(\tfrac{p}{3}+k)^2 + 2p(\tfrac{2p}{3}-k)]^2 - 4(\tfrac{p}{3}+k)^2(\tfrac{p}{3}-\tfrac{k}{2}+p)^2.$$

Wenn man nun Gleichung (4) durch N(k,p) dividiert, bekommt man einen formalen Ausdruck für $\tilde{\psi}_{123}(k,p)$. Man muß jedoch dafür sorgen, daß man dabei die Lösungsmannigfaltigkeit der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung nicht einschränkt, bzw. daß man diese Einschränkung nach physikalischen Gesichtspunkten vornimmt.

Eine elegante Methode zur Behandlung solcher Probleme ist von Dirac (1927c) im Rahmen der Streuprozesse der nichtrelativistischen Quantenmechanik ausgearbeitet worden. Die eindimensionale Wellengleichung im Impulsraum $(p_0^2-p^2)\,u(p) = \lambda\cdot V(p,p_0)$ wird dort gelöst durch:

$$u(p) = \frac{\lambda V(p,p_0)}{p_0^2-p^2} + c_1\delta(p-p_0) + c_2\delta(p+p_0)$$

mit willkürlichen Konstanten $c_1, c_2$ und der Vorschrift, daß bei Rücktransformation in den Ortsraum die Singularitäten bei $p = \pm p_0$ als Hauptwertintegration auszuführen sind. Die mit den Konstanten $c_1$ und $c_2$ multiplizierten $\delta$-Funktionen stellen dabei anschaulich aus- bzw. einlaufende Wellen dar, und die $c_i$ können aus den experimentell vorliegenden Randbedingungen eindeutig bestimmt werden.

In Erweiterung dieser Methode würde die Lösung unserer Gleichung (4) lauten:

$$\tilde{\psi}_{123}(k,p) = i\varepsilon^4 \frac{Z_{123}(k,p)}{N(k,p)} \left\{ W_{23}\chi^1(k) + W_{31}\chi^2(p-\tfrac{k}{2}) + W_{12}\chi^3(-p-\tfrac{k}{2}) \right\} + \sum_{N(\mathfrak{k},k^\circ_i,p)=0} f_i(\mathfrak{k},p)\,\delta(k^\circ - k^\circ_i),$$

wobei $k^\circ$ eine beliebige zeitartige, etwa die Energie-Komponente des Vierervektors k ist, und $\mathfrak{k}$ die restlichen drei Komponenten umfaßt. Da der Ausdruck N(k,p) in k vom 3. Grad ist (p kommt nur quadratisch vor), gibt es drei Nullstellen $k^\circ_i$, und entsprechend hängt die allgemeine Lösung $\tilde{\psi}_{123}(k,p)$ von drei beliebigen Funktionen $f_i(\mathfrak{k},p)$ von je 7 Variablen ab, wie es bei einer partiellen Differentialgleichung 3. Ordnung für eine Funktion von 8 unabhängigen Veränderlichen sein muß. (In Wahrheit sind die Funktionen $f_i(\mathfrak{k},p)$ nicht völlig beliebig wählbar, weil ja die Gleichung (4) infolge der Multiplikation mit $Z_{123}(k.p)$ nicht mehr mit der ursprünglichen Dreiteilchengleichung äquivalent ist: nicht jede Lösung von Gleichung (4) befriedigt auch Gleichung (1). Für uns ist aber diese Einschränkung im folgenden ohne Belang.) Die Festlegung der Funktionen $f_i(\mathfrak{k},p)$ nach physikalischen Gesichtspunkten ist jedoch in unserem Fall sehr viel schwieriger als bei dem Diracschen Streuproblem, weil die Funktionen $\delta(k^\circ - k^\circ_i)$ im Ortsraum nicht einfach Kugelwellen darstellen. Durch sie wird vielmehr die Abhängigkeit von $\psi_{123}(x,\xi)$ von den Relativzeiten $x^\circ$ und $\xi^\circ$ ganz wesentlich mitbestimmt, eine Eigenschaft, die nicht unmittelbar aus experimentellen Randbedingungen abgelesen werden kann, jedenfalls solange man über Mehrzeittheorien noch nicht gut Bescheid weiß. Wir wollen uns deshalb bei der Festlegung der $f_i(\mathfrak{k},p)$ an der Boppschen Behandlung des Zweiteilchenproblems orientieren.

Die unserer Gleichung (4) entsprechende Relation lautet dort [vgl. Bopp (1958), Seite 190]:

$$P\!\!\!/\, \tilde{\psi}(k) = -\frac{i\varepsilon^4}{4}(P\bar{\Gamma} + 4k\Gamma) W \psi(0) .$$

Die allgemeine Lösung im Fall $P=(\Omega,\vec{0})$ lautet mit $k=(\omega,\vec{k})$:

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{i\varepsilon^4}{4\Omega\omega}(P\bar{\Gamma} + 4k\Gamma) W \psi(0) + \tilde{f}(\vec{k})\cdot\delta(\omega) ,$$

bzw. im Ortsraum mit $x=(\tau,\vec{\varrho})$:

$$\psi(x) = \frac{i\varepsilon^4}{(2\pi)^4} \int\!\!\!\!\!\!- dk \frac{P\bar{\Gamma} + 4k\Gamma}{4\Omega\omega} W\psi(0) e^{ikx} + \frac{1}{2\pi} f(\vec{\varrho}) .$$

Das Zeichen $\int\!\!\!\!\!\!-$ soll ausdrücken, daß von der Integration über den 4-dimensionalen k-Raum zuerst über $\omega$ zu integrieren ist und daß der Pol bei $\omega=0$ nach der Hauptwertvorschrift zu behandeln ist. Man erhält dann:

$$\psi(x) = -\left\{ i\Gamma^0 \delta(\tau) + \left(\frac{1}{4}\Omega\bar{\Gamma}^0 + i\vec{\Gamma}\partial_{\vec{\varrho}}\right)\eta(\tau)\right\} \frac{\varepsilon^4 \delta(\vec{\varrho})}{\Omega} W\psi(0) + \frac{1}{2\pi} f(\vec{\varrho}) .$$

Nun verlangt die Blochsche Interpretation für Mehrzeitfunktionen [Bloch (1934)], daß $\psi^+(x_1,t_1;x_2,t_2) O \psi(x_1,t_1;x_2,t_2)$ — mit einem nicht näher festgelegten Spinoperator O - ein Maß dafür ist, das Teilchen 1 zur Zeit $t_1$ am Ort $x_1$ und das Teilchen 2 zur Zeit $t_2$ am Ort $x_2$ zu finden, falls beide Meßpunkte raumartig zueinander liegen, die Messungen sich also nicht gegenseitig stören. Demnach liegen die zu $\eta(\tau)$ proportionalen Terme außerhalb des interpretierbaren Bereichs (ein weiteres, davon unabhängiges Argument, warum diese Terme nicht zur Wahrscheinlichkeitsdeutung beitragen, wird in §5 gegeben), die Fusion von zwei "Urteilchen" zu einem neuen Elementarteilchen muß also allein durch die Glieder

$-\frac{i\varepsilon^4\Gamma^0}{\Omega} W\,\psi(0)\,\delta(\tau)\delta(\varkappa)$ und $\frac{1}{2\pi}\,f(\varkappa)$ beschrieben werden. Davon ist das erste Glied unmittelbar verständlich: die Funktion $\delta(\varkappa)$ drückt die lokale Struktur des fusionierten Teilchens aus, und der Faktor $\delta(\tau)$ schneidet den ohnehin nicht interpretierbaren Bereich ab (Messungen am selben Ort zu verschiedenen Zeiten würden sich stören!). Dagegen ist ein Zusatzglied der Gestalt $\frac{1}{2\pi}\,f(\varkappa)$ nur schwer zu deuten, vor allem weil es ganz unabhängig von der Relativzeit $\tau$ ist, also auf alle Fälle zugleich interpretierbare und nichtinterpretierbare Bereiche überdeckt; außerdem käme dann zu dem vermöge des Gliedes $\delta(\tau)\,\delta(\varkappa)$ bereits vorhandenen "lokalen Kern" noch eine weitgehend willkürliche Ausdehnungsfunktion $f(\varkappa)$ hinzu (bzgl. der Einschränkungen an $f(\varkappa)$ siehe Neuburger (1960)). Es erscheint also sinnvoll, die Fusionslösung durch das Hauptwertintegral ohne Zusatzglieder darzustellen. Entsprechend hat man dann in einem beliebigen Lorentzsystem den Hauptwert bzgl. der zu P parallelen Komponente von k zu nehmen.

Diese im Zweiteilchenfall durch physikalische Argumente begründete Beschränkung auf eine spezielle Lösung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung wollen wir nun auch bei der Dreiteilchengleichung vornehmen. Wir legen also fest: Über die den Relativkoordinaten entsprechenden Impulse k und p ist stets so zu integrieren, daß zuerst die zum Schwerpunktsimpuls P parallelen Komponenten ausgeführt werden und daß bei ev. auftretenden Polen die Hauptwerte genommen werden. (Es sei jedoch vermerkt, daß prinzipiell in einem fortgeschritteneren Stadium der Theorie, wenn man einmal über mehrzeitige Funktionen besser orientiert ist, auch andere Integrationsvorschriften physikalisch nahegelegt werden können, vor allem im Zusammenhang mit Streuproblemen; vgl. hierzu §§3,4 und 5).

Die Auflösung der Gleichung (4) können wir jetzt ohne Bedenken in der Form

$$(5)\qquad \tilde{\psi}_{123}(k,p) = i\varepsilon^4 \frac{Z_{123}(k,p)}{N(k,p)} \left\{ W_{23}\chi^1(k) + W_{31}\chi^2(p-\tfrac{k}{2}) + W_{12}\chi^3(-p-\tfrac{k}{2}) \right\}$$

hinschreiben; denn durch obige Vorschriften ist die rechte Seite dieser Gleichung eindeutig definiert.

Nachdem damit die Fourierkomponente $\tilde{\psi}_{123}(k,p)$ auf die Funktionen $\chi^i(k)$ zurückgeführt ist, können wir auch für die $\chi^i(k)$ selbst Bestimmungsgleichungen angeben, indem wir (5) rekursiv in die Definitionsgleichungen (3) einsetzen:

$$\chi^1(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\int dp\, \frac{Z_{123}(k,p)}{N(k,p)} \left\{ W_{23}\chi^1(k) + W_{31}\chi^2(p-\tfrac{k}{2}) + W_{12}\chi^3(-p-\tfrac{k}{2}) \right\}$$

$$\chi^2(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\int dp\, \frac{Z_{123}(p,k+\frac{p}{2})}{N(p,k+\frac{p}{2})} \left\{ W_{23}\chi^1(p) + W_{31}\chi^2(k) + W_{12}\chi^3(-k-p) \right\}$$

$$\chi^3(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\int dp\, \frac{Z_{123}(p,-k-\frac{p}{2})}{N(p,-k-\frac{p}{2})} \left\{ W_{23}\chi^1(p) + W_{31}\chi^2(-k-p) + W_{12}\chi^3(k) \right\}.$$

Ersetzt man in der zweiten Gleichung unterm Integral p durch -p-k/2 und in der dritten p durch p-k/2 und beachtet die spezielle Gestalt von Z und N, so erhält man das folgende Integralgleichungssystem für die Funktionen $\chi^i(k)$:

$$\chi^1(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\int dp\, \frac{Z_{123}(k,p)}{N(k,p)} \left\{ W_{23}\chi^1(k) + W_{31}\chi^2(p-\tfrac{k}{2}) + W_{12}\chi^3(-p-\tfrac{k}{2}) \right\}$$

$$(6)\qquad \chi^2(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\int dp\, \frac{Z_{231}(k,p)}{N(k,p)} \left\{ W_{31}\chi^2(k) + W_{12}\chi^3(p-\tfrac{k}{2}) + W_{23}\chi^1(-p-\tfrac{k}{2}) \right\}$$

$$\chi^3(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\int dp\, \frac{Z_{312}(k,p)}{N(k,p)} \left\{ W_{12}\chi^3(k) + W_{23}\chi^1(p-\tfrac{k}{2}) + W_{31}\chi^2(-p-\tfrac{k}{2}) \right\}.$$

Die explizite Lösung dieses Integralgleichungssystems führen wir in zwei Schritten durch: Zunächst kann man durch Iteration auf die funktionelle Abhängigkeit der $\chi^i$ von ihrem Argument schließen. Die etwas mühsamen Rechnungen bringen wir im Anhang und übernehmen hier nur das Ergebnis: $\chi^i(k)$ sind gebrochen rationale Funktionen von k, deren Zähler und Nenner gleichen Grad haben. Mit Hilfe dieser Eigenschaft können wir dann das Integralgleichungssystem (6) leicht auflösen: Da sowohl Z(k,p) wie N(k,p) Polynome 2. Grades in p sind, sind alle Integranden gebrochen rationale Funktionen von p mit gleichem Zähler- und Nennergrad. Es ist aber

$$\frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint dz\,\frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_n},$$

sodaß entsprechend in unserem Fall nur die höchsten $p_P$-Potenzen im Zähler und Nenner Beiträge zum Integral liefern:

$$p \longrightarrow p_P = \frac{Pp}{P^2}P$$

$$Z_{123}(k,p) \longrightarrow 4\frac{(Pp)^2}{P^4}\left\{\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1(P\Gamma_{23})^2 - \left(\frac{2P^2}{3} - Pk\right)(P\Gamma_{23})\right\},$$

entsprechend $Z_{231}(k,p)$ und $Z_{312}(k,p)$.

$$N(k,p) \longrightarrow 4\frac{(Pp)^2}{P^4}\left\{\frac{P^4}{3} - 2P^2(Pk) + (Pk)^2 - P^2k^2\right\}$$

$$\frac{Z_{123}(k,p)}{N(k,p)} \longrightarrow \frac{\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1(P\Gamma_{23})^2 - \left(\frac{2P^2}{3} - Pk\right)(P\Gamma_{23})}{\frac{P^4}{3} - 2P^2(Pk) + (Pk)^2 - P^2k^2},$$

wobei $\Gamma_{23}{}^\mu = \frac{\gamma_2{}^\mu + \gamma_3{}^\mu}{2}$.

Die zum Integral beitragenden Anteile von $\frac{Z(k,p)}{N(k,p)}$ sind also völlig unabhängig vom Vierervektor p (auch von seinen zu P senkrechten Komponenten!). Dasselbe gilt für die entsprechenden Anteile von $\chi^i\left(p-\frac{k}{2}\right)$ und $\chi^i\left(-p-\frac{k}{2}\right)$ (vgl. Anhang), die hier also durch

konstante Spinoren $\mathring{\chi}^i$ ersetzt werden können. (Für die $\mathring{\chi}^i$ kann man folgende explizite Gestalt angeben: $\mathring{\chi}^i = \varepsilon^4 (2\pi)^{-4} \int dh\, \chi^i(h)$, also auf Grund der Gleichung (3): $\mathring{\chi}^1 = \mathring{\chi}^2 = \mathring{\chi}^3 = \frac{1}{\varepsilon^4} \gamma_{123} (\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3) = \mathring{\chi}$.) Damit reduziert sich das Integralgleichungssystem (6) auf das gewöhnliche Gleichungssystem:

$$\chi^1(h) = i \frac{(\frac{p}{3}+h)\gamma_1 (p\Gamma_{23})^2 - (\frac{2p^2}{3} - ph)\, p\Gamma_{23}}{\frac{p^4}{3} - 2p^2(ph) + (ph)^2 - p^2h^2} \left\{ W_{23}\chi^1(h) + (W_{31}+W_{12})\mathring{\chi} \right\}$$

$$(7) \qquad \chi^2(h) = i \frac{(\frac{p}{3}+h)\gamma_2 (p\Gamma_{31})^2 - (\frac{2p^2}{3} - ph)\, p\Gamma_{31}}{\frac{p^4}{3} - 2p^2(ph) + (ph)^2 - p^2h^2} \left\{ W_{31}\chi^2(h) + (W_{12}+W_{23})\mathring{\chi} \right\}$$

$$\chi^3(h) = i \frac{(\frac{p}{3}+h)\gamma_3 (p\Gamma_{12})^2 - (\frac{2p^2}{3} - ph)\, p\Gamma_{12}}{\frac{p^4}{3} - 2p^2(ph) + (ph)^2 - p^2h^2} \left\{ W_{12}\chi^3(h) + (W_{23}+W_{31})\mathring{\chi} \right\}.$$

Jede einzelne dieser Gleichungen kann als inhomogene Operatorgleichung für ein $\chi^i(h)$ aufgefaßt werden, wobei $\mathring{\chi}$ die Rolle des "Quellterms" spielt. Diese Quelle ist jedoch zunächst nicht bekannt, sondern definitionsgemäß erst durch die Lösungen $\chi^i(h)$ bestimmt. Man kann aber unmittelbar eine Bestimmungsgleichung für den Spinor finden, wenn man die Gleichungen (7) unter Beachtung der Hauptwertvorschrift über k integriert. Es ergibt sich in allen drei Fällen:

$$(8) \qquad \left[ p^2 (p\gamma_1 + p\gamma_2 + p\gamma_3) + (p\gamma_1)(p\gamma_2)(p\gamma_3) \right] (W_{23}+W_{31}+W_{12})\, \mathring{\chi} = 4i p^4 \mathring{\chi}.$$

Damit ist die Boppsche Dreiteilchengleichung im Prinzip vollständig gelöst, und wir wollen nun die Konstruktion der Lösungsfunktion rückwärts verfolgen: Zunächst werden der Spinor $\mathring{\chi}$ und der Masseneigenwert $P^2$ aus der Eigenwertgleichung (8) bestimmt.

Das ermöglicht dann gemäß (7) die Funktionen $\chi(k)$ und nach Gleichung (5) die Fourierkomponente $\widetilde{\psi_{123}}(k,p)$ zu finden. Die letzten Endes interessierende Funktion $\psi_{123}(y_1,y_2,y_3)$ läßt sich daraus durch Fouriertransformation gewinnen.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch auf die Symmetriebedingungen eingehen, die an die Schrödingeramplitude $\psi_{123}(y_1,y_2,y_3)$ zu stellen sind. Da die "Urteilchen", auf die sich die Koordinaten $y_i$ und die Spinorindizes beziehen, Fermionen sind, muß die Gesamtwellenfunktion nach dem Pauliprinzip vollständig antisymmetrisch bzgl. Teilchenvertauschungen sein. Nun hat Bopp (1958) vorgeschlagen, den fusionierten Teilchen ganz allgemein auch einen Isospin zuzuordnen. Das ist natürlich problematisch, zumindest dann, wenn man mit der Theorie, wie es bisher geschehen ist, auch das Neutrino, das Lichtquant und das Elektron erfassen will. Diesen Teilchen würde man in Anlehnung an die üblichen Elementarteilchentheorien am liebsten gar keine Isospinquantenzahl geben, oder man sollte sie durch ein Gemisch von Isospinzuständen beschreiben. Die Lösungen der Boppschen Mehrteilchengleichungen zerfallen jedoch wegen der völlig symmetrischen Struktur dieser Gleichungen und wegen der Isospinunabhängigkeit der Wechselwirkung automatisch in die zu den einzelnen Isospin-Symmetrieklassen gehörenden Anteile, sodaß es natürlich erscheint, die Elementarteilchen durch diese einzelnen Teile zu beschreiben und nicht erst durch ein Gemisch von solchen. Wollte man den Isospin ganz fortlassen, so müßte wegen des Pauliprinzips bereits die nur von Ort und Spin abhängige Wellenfunktion vollständig antisymmetrisch sein. Da aber bei dem hier interessierenden Dreiteilchenfall die Gleichung (8) gar keine nichttriviale

Lösung dieser Symmetrieklasse zuläßt, - wie sich in §2 herausstellen wird -, wollen wir auch diese Möglichkeit nicht weiter diskutieren, sondern wie in der Boppschen Arbeit durch das "Ankleben" eines Isospins eine reichere Auswahl von Symmetrieklassen für $\psi_{123}(y_1, y_2, y_3)$ ermöglichen. (Es besteht freilich keine logische Notwendigkeit, diese zusätzliche Quantenzahl mit dem Isospin zu identifizieren, vor allem, solange der Isospinformalismus nur ein durch eine Reihe von experimentellen Ergebnissen nahegelegtes Schema darstellt, aber nicht aus universellen physikalischen Prinzipien - etwa raumzeitlichen Strukturen - ableitbar ist.) Die Gesamtwellenfunktion setzen wir also in Zukunft als Produkt aus einer Isospinfunktion und einer nur mehr von Ort und gewöhnlichem Spin abhängigen Funktion $\psi_{123}(y_1, y_2, y_3)$ an.

Für eine von drei Variablen abhängige Funktion $f(z_1, z_2, z_3)$ gibt es im allgemeinen Fall drei Symmetrieklassen:

1.) Die vollständig symmetrische Klasse:

$$f(z_1, z_2, z_3) = f(z_2, z_1, z_3) = f(z_1, z_3, z_2).$$

2.) Die vollständig antisymmetrische Klasse:

$$f(z_1, z_2, z_3) = -f(z_2, z_1, z_3) = -f(z_1, z_3, z_2).$$

3.) Die Klasse, in der die Summe der geraden Permutationen verschwindet. Bei Auszeichnung der ersten Funktionsstelle kann man diese Klasse in zwei zueinander fremde Untergruppen aufteilen

3a.) $f(z_1, z_2, z_3) = f(z_1, z_3, z_2)$

$$f(z_1, z_2, z_3) + f(z_2, z_3, z_1) + f(z_3, z_1, z_2) = 0.$$

3b.) $f(z_1, z_2, z_3) = -f(z_1, z_3, z_2)$

$$f(z_1, z_2, z_3) + f(z_2, z_3, z_1) + f(z_3, z_1, z_2) = 0.$$

Eine solche Aufteilung ist natürlich auf mannigfache Weise möglich, z.B. ist es oft praktisch, die Klasse 3 durch die in den ersten beiden Stellen antimetrischen Funktionen zusammen mit den in den letzten beiden Stellen antimetrischen Funktionen zu erzeugen.

Zerlegen wir nun speziell einen 8-komponentigen Isospinor $\Sigma_{ikl}$ (i,k,l=1,2) nach diesen Symmetrieklassen, so erhalten wir eine 4-dimensionale Darstellung zur Klasse 1 (Isospin T=3/2, $T_3=\pm 3/2, \pm 1/2$ und je 2-dimensionale Darstellungen zu den Klassen 3a und 3b (Isospin T=1/2, $T_3=\pm 1/2$), während $\Sigma_{ikl}$ auf Grund der Zweiwertigkeit seiner Indizes keinen vollständig antisymmetrischen Anteil hat. Für die mit $\Sigma_{ikl}$ multiplizierte Orts-Spinfunktion $\psi_{123}(y_1, y_2, y_3)$ gilt dann nach dem Pauliprinzip in den Fällen:

T = 3/2: $\psi_{123}(y_1, y_2, y_3)$ ist vollständig antisymmetrisch:

$$\psi_{123}(y_1, y_2, y_3) = -\psi_{132}(y_1, y_3, y_2) = -\psi_{213}(y_2, y_1, y_3).$$

Daraus folgt für die Fourierkomponenten:

$$\tilde{\psi}_{123}(k, p) = -\tilde{\psi}_{132}(k, p) = -\tilde{\psi}_{213}\left(-\tfrac{k}{2}+p, \tfrac{3k}{4}+\tfrac{p}{2}\right)$$

und außerdem nach den Definitionsgleichungen (3) für die $\chi^i(k)$

$$\chi^1_{123}(k) = -\chi^1_{132}(k) = -\chi^2_{213}(k) = -\chi^3_{321}(k).$$

Das hat wiederum für den Spinor $\mathring{\chi}$ die folgende Symmetrie-Eigenschaft zur Folge:

$$\mathring{\chi}_{123} = -\mathring{\chi}_{132} = -\mathring{\chi}_{213}.$$

T = 1/2: Je nachdem, ob $\Sigma_{ikl} = \mp \Sigma_{ilk}$, gehört $\psi_{123}(y_1, y_2, y_3)$ zur Klasse 3a bzw. 3b:

$$\psi_{123}(y_1, y_2, y_3) = \pm \psi_{132}(y_1, y_3, y_2)$$

$$\psi_{123}(y_1, y_2, y_3) + \psi_{231}(y_2, y_3, y_1) + \psi_{312}(y_3, y_1, y_2) = 0.$$

Daraus folgt wie oben:

$$\tilde{\psi}_{123}(k,p) = \pm\, \tilde{\psi}_{132}(k,-p)$$

$$\tilde{\psi}_{123}(k,p) + \tilde{\psi}_{231}\left(-\tfrac{k}{2}+p, -\tfrac{3k}{4}-\tfrac{p}{2}\right) + \tilde{\psi}_{312}\left(-\tfrac{k}{2}-p, \tfrac{3k}{4}-\tfrac{p}{2}\right) = 0$$

$$\hat{\chi}_{123}(k) = \pm\, \hat{\chi}_{132}(k) \;;\quad \hat{\chi}^1_{123}(k) + \hat{\chi}^2_{312}(k) + \hat{\chi}^3_{231}(k) = 0$$

$$\mathring{\chi}_{123} = \pm\, \mathring{\chi}_{132} \;;\quad \mathring{\chi}_{123} + \mathring{\chi}_{231} + \mathring{\chi}_{312} = 0$$

Umgekehrt folgen aus den Bedingungen an den Spinor $\mathring{\chi}$ die jeweiligen Symmetrien von $\hat{\chi}^i(k)$, $\tilde{\psi}(k,p)$ und $\psi_{123}(y_1,y_2,y_3)$ automatisch gemäß den Bestimmungsgleichungen (7) und (5), sodaß wir im weiteren nur von den Einschränkungen an $\mathring{\chi}$ Gebrauch machen müssen.

## §2. Die Eigenwertgleichung für die Schwerpunktsbewegung.

Wir wollen nun darangehen, den konstanten Spinor $\mathring{\chi} = \frac{1}{\varepsilon^4}\, \eta_{123}(y_1 = y_2 = y_3)$ aus der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichung

$$(8)\quad [P^2(P\gamma_1 + P\gamma_2 + P\gamma_3) + (P\gamma_1)(P\gamma_2)(P\gamma_3)](W_{23} + W_{31} + W_{12})\,\mathring{\chi} = 4i\,P^4\,\mathring{\chi}$$

zu berechnen und zugleich den Eigenwert für $P^2$ durch die Wechselwirkungskonstanten $\varkappa_i$ (vgl. Seite 12) auszudrücken. Es sei dabei im folgenden stets $P^2 \neq 0$ vorausgesetzt. (Da P der Impuls eines physikalischen Teilchens sein soll, hat das in unserer Metrik zur Folge: $P^2 < 0$).

Wenn man Gleichung (8) nacheinander mit den Operatoren $(P\gamma_1)$, $(P\gamma_2)$ und $(P\gamma_3)$ multipliziert, ergibt sich:

$$(9)\qquad (P\gamma_1)\,\mathring{\chi} = (P\gamma_2)\,\mathring{\chi} = (P\gamma_3)\,\mathring{\chi}$$

Um diese Relation im einzelnen auszuwerten und vor allem im Zusammenhang mit den Symmetriebedingungen an $\mathring{\chi}$ zu diskutieren, spalten wir $\mathring{\chi}$ nach den auf die einzelnen Teilchen bezogenen Komponenten auf

$$\mathring{\chi} = \sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{4} a_{\lambda\mu\nu}\, u_\lambda \times u_\mu \times u_\nu$$

Dabei sollen die Basisspinoren $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ die Eigenzustände von $(P\gamma)$ sein:

$$(P\gamma)\,u_{1/2} = i\sqrt{-P^2}\,u_{1/2}\,; \qquad (P\gamma)\,u_{3/4} = -i\sqrt{-P^2}\,u_{3/4}\,.$$

(Die $u_i$ sind vollständig im Spinraum jedes einzelnen Teilchens.)

Die Relation (9) hat dann offensichtlich zur Folge, daß $a_{\lambda\mu\nu}$ nur dann von Null verschieden ist, wenn $\lambda,\mu,\nu$ sämtlich kleiner als 3 oder sämtlich größer als 2 sind. Welche weiteren Einschränkungen erfährt nun $\mathring{\chi}$ gemäß dem Pauliprinzip?

Wie am Schluß von §1 gezeigt wurde, kommen für den zunächst 64-komponentigen Spinor $\mathring{\chi}$ die folgenden Symmetrieklassen in Frage:

Die vollständig antisymmetrische Klasse 2: $\mathring{\chi}_{123} = -\mathring{\chi}_{132} = -\mathring{\chi}_{213}$. Man überlegt sich leicht, daß dieser Klasse ein 4-dimensionaler Darstellungsraum entspricht.

Die Klasse 3a: $\mathring{\chi}_{123} = \mathring{\chi}_{132}$ ; $\mathring{\chi}_{123} + \mathring{\chi}_{231} + \mathring{\chi}_{312} = 0$ , zu der ein 20-dimensionaler Darstellungsraum gehört.

Die Klasse 3b: $\mathring{\chi}_{123} = -\mathring{\chi}_{132}$ ; $\mathring{\chi}_{123} + \mathring{\chi}_{231} + \mathring{\chi}_{312} = 0$ mit einem ebenfalls 20-dimensionalen Darstellungsraum.

Dagegen ist ein vollständig symmetrischer Spinor $\mathring{\chi}$ (der die restlichen 20 Dimensionen des ursprünglich 64-dimensionalen Raums aufspannen würde) durch das Ankleben eines Isospins ausgeschlossen.

Die Klassen 2 und 3b haben die Eigenschaft $\mathring{\chi}_{123} = -\mathring{\chi}_{132}$ gemeinsam. Aus ihr folgt $a_{\lambda\mu\nu} = -a_{\lambda\nu\mu}$, und $\mathring{\chi}$ hat dann die einfache Gestalt:

$$\mathring{\chi} = a_{112}(u_1 \times u_1 \times u_2 - u_1 \times u_2 \times u_1) + a_{212}(u_2 \times u_1 \times u_2 - u_2 \times u_2 \times u_1)$$
$$+ a_{334}(u_3 \times u_3 \times u_4 - u_3 \times u_4 \times u_3) + a_{434}(u_4 \times u_3 \times u_4 - u_4 \times u_4 \times u_3).$$

Man rechnet sofort nach, daß $\mathring{\chi}$ die Bedingung $\mathring{\chi}_{123} + \mathring{\chi}_{231} + \mathring{\chi}_{312} = 0$ befriedigt. Die Klasse 2 wird also durch die Relation (9) automatisch annulliert, und der zu 3b gehörige 20-dimensionale Raum wird auf 4 Komponenten reduziert.

Die zur Klasse 3a gehörigen 20 Komponenten von $\mathring{\chi}$, die ebenfalls durch (9) auf vier Komponenten reduziert werden, brauchen bei der Diskussion der Eigenwertgleichung nicht berücksichtigt werden. Denn die volle Symmetrieklasse 3 kann, wie in §1 erwähnt wurde, auch durch Hinzunahme der in den ersten beiden Indizes antimetrischen Spinoren $\mathring{\chi}_{123}$ zur Klasse 3b erzeugt werden. Bezüglich der symmetrischen Gleichung (8) liefern aber die in den ersten beiden und die in den letzten beiden Indizes antimetrischen Spinoren dieselben Ergebnisse. Sobald wir freilich (in §3) unsymmetrische Gleichungen untersuchen, können im Prinzip beide Symmetrieanteile ein verschiedenes Verhalten zeigen.

Wenn wir nun die Gleichung (8) im einzelnen auswerten, gehen wir jedoch wieder von dem Basissystem der $u_\lambda$ ab, weil dieses System der Anwendung der $\gamma$-Matrizen nicht angemessen ist. Wir machen statt dessen für $\mathring{\chi}$ den Ansatz:

$$\mathring{\chi} = a\, v_0 + b_\mu v_1^\mu - \tfrac{1}{2} c_{\mu\nu} \tilde{v}_2^{\mu\nu} + d_\mu v_3^\mu + e\, v_4 , \tag{10}$$

wo die v ein vollständiges Basissystem im Spinraum der Teilchen 2 und 3 sein sollen, während a, $b_\mu$, . . Spinoren bzgl. des Teilchens 1 sind. Dieser Ansatz bewährt sich vor allem deshalb, weil man die v als quadratische, 4-reihige Matrizen auffassen kann und somit den Elementen der Liracalgebra zuordnen kann (siehe z.B. Bopp (1958), Tafel (7.7)), für die geläufige Rechenregeln gelten. Die Multiplikation mit einem Operator aus dem Spinraum der Teilchen 2 und 3 geschieht dann nach folgendem Rezept: $(\gamma_\mu \times \gamma_\nu)\, v = \gamma_\mu\, v\, \gamma_\nu^T$, wo $\gamma_\nu^T$ das Transponierte von $\gamma_\nu$ ist, also z.B.:

(11)

| $v$ | $v_0$ | $v_1^\mu$ | $\tilde{v}_2^{\mu\nu}$ | $v_3^\mu$ | $v_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma_{23}{}^\beta v$ | $v_1{}^\beta$ | $v_0 g^{\beta\mu}$ | $g^{\mu\beta}v_3{}^\nu - g^{\nu\beta}v_3{}^\mu$ | $\tilde{v}_2{}^{\beta\mu}$ | 0 |

(vgl. Tafel (7.8) bei Bopp (1958)).

Die Auszeichnung des Teilchens 1 bei dem Ansatz (10) braucht einen nicht zu stören, weil ja auch in den Symmetriebedingungen das Teilchen 1 eine Sonderrolle spielt, und weil wir den v-Formalismus z.B. auch auf die Gleichungen (7) anwenden wollen, in denen jeweils ein Teilchen vor den anderen ausgezeichnet ist.

Durch die Symmetriebedingung $\dot{\chi}_{123} = -\dot{\chi}_{132}$ reduziert sich der Ansatz für $\dot{\chi}$ auf:

$$\dot{\chi} = a v_0 + b_\mu v_1^\mu + e v_4 \qquad (10\,a)$$

Die Reduktion auf die vier wesentlichen Komponenten wird, wie wir bereits wissen, durch die Relation (9) geleistet; mit den Rechenregeln (11) erhält man leicht:

$$b_\mu = \frac{P\gamma_1}{P^2} P_\mu a \qquad e = 0 \qquad (12)$$

Zur endgültigen Auswertung der Eigenwertgleichung (8) schreiben wir diese nun in Anpassung an die Auszeichnung des Teilchens 1 folgendermaßen um:

$$[P^2 + (P\Gamma_{23})(P\gamma_1)](P\Gamma_{23})\left(\frac{W_{23}}{2} + \frac{W_{31}+W_{12}}{2}\right)\dot{\chi} = iP^4\dot{\chi}. \qquad (8')$$

Mit der in Formel (2) angegebenen Wechselwirkungsmatrix $W_{23}$ erhält man:

$$(13)\qquad W_{23}\,\mathring{\chi} = \varkappa_0\, a v_0 + \varkappa_1\, b_\mu v_1^\mu ,$$

wo
$$\varkappa_0 = \bar{\varkappa}_0 + 4\bar{\varkappa}_1 - 6\bar{\varkappa}_2 - 4\bar{\varkappa}_3 + \bar{\varkappa}_4$$
$$\varkappa_1 = \bar{\varkappa}_0 - 2\bar{\varkappa}_1 \qquad - 2\bar{\varkappa}_3 - \bar{\varkappa}_4 .$$

Etwas umfangreicher gestaltet sich die Berechnung von $\frac{W_{31}+W_{12}}{2}\,\mathring{\chi}$, doch ist auch sie nach der Regel $(\gamma_\mu \times \gamma_\nu)\, v = \gamma_\mu v \gamma_\nu^T$ leicht auszuführen. Wir geben für die einzelnen Anteile der Wechselwirkung die Ergebnisse an:

$$\tfrac{1}{2}\gamma_\mu \times (\gamma^\mu \times 1 + 1 \times \gamma^\mu)\,\mathring{\chi} = \gamma_1^\mu (a v_{1\mu} + b_\mu v_0) = \gamma_1^\mu a v_{1\mu} + a v_0$$

$$\tfrac{1}{4}\gamma_{\mu\nu} \times (\gamma^{\mu\nu} \times 1 + 1 \times \gamma^{\mu\nu})\,\mathring{\chi} = i\gamma_1^{\mu\nu} b_\mu v_{1\nu} = (-\gamma_1^\mu + \tfrac{\not{p}\gamma_1}{p^2} p^\mu)\, a v_{1\mu}$$

$$(14)$$

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{5\mu} \times (\gamma^{5\mu} \times 1 + 1 \times \gamma^{5\mu})\,\mathring{\chi} = -\gamma_1^{5\mu} b_\mu v_4 = i\gamma_1^5\, a v_4$$

$$\tfrac{1}{2}\gamma_5 \times (\gamma^5 \times 1 + 1 \times \gamma^5)\,\mathring{\chi} = -i\gamma_1^5\, a v_4 .$$

Damit lautet Gleichung (8') in Komponenten:

$$[p^2 + (\not{p}\Gamma_{23})(\not{p}\gamma_1)]\,(\not{p}\Gamma_{23})\Big\{\big(\tfrac{\varkappa_0}{2} + \bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1\big)\, a v_0 + \big[\big(\tfrac{\varkappa_0}{2} + \bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_2\big)\tfrac{\not{p}\gamma_1}{p^2} p^\mu +$$
$$+ (\bar{\varkappa}_1 - \bar{\varkappa}_2)\gamma_1^\mu\big]\, a v_{1\mu} + i(\bar{\varkappa}_3 - \bar{\varkappa}_4)\gamma_1^5\, a v_4\Big\} = i p^4 \big(a v_0 + \tfrac{\not{p}\gamma_1}{p^2} p^\mu a v_{1\mu}\big).$$

Führt man schließlich noch die Operation $(\not{p}\Gamma_{23})$ gemäß Tafel (11) aus, so erhält man:

$$(15)\quad \big(\tfrac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2} + 2\bar{\varkappa}_0 + 2\bar{\varkappa}_1\big)\big(a v_0 + \tfrac{\not{p}\gamma_1}{p^2} p^\mu a v_{1\mu}\big) = i(\not{p}\gamma_1)\big(a v_0 + \tfrac{\not{p}\gamma_1}{p^2} p^\mu a v_{1\mu}\big).$$

Der Spinor a muß also der Gleichung genügen:

$$i(P\gamma_1)\,a = 3(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)\,a\,.$$

Damit diese Gleichung eine nichttriviale Lösung besitzt, muß für die durch $P^2 = -M^2$ definierte Masse M des dreifach fusionierten Teilchens gelten:

$$(16) \qquad M = \pm 3(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)$$

und der Spinor a genügt dann der Diracgleichung:

$$(17) \qquad (iP\gamma_1 \mp M)\,a = 0\,.$$

Damit ist das Eigenwertproblem für die Boppsche Dreiteilchengleichung vollständig gelöst, und wir wollen nun die Ergebnisse diskutieren.

Zunächst können wir aus der Diracgleichung (17) wegen $\dot{\chi} = a\nu_0 + \frac{P\gamma_1}{P^2} P^\mu a \nu_{1\mu}$ ableiten, daß für $\dot{\chi} = \frac{1}{\xi^4}\chi(\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3)$ selbst ebenfalls eine Diracgleichung gilt:

$$(18a) \qquad (iP\gamma_1 \mp M)\,\dot{\chi} = 0\,.$$

Die Diracgleichungen

$$(18b,c) \qquad (iP\gamma_2 \mp M)\,\dot{\chi} = 0\,; \qquad (iP\gamma_3 \mp M)\,\dot{\chi} = 0$$

bzgl. der zu den Teilchen 2 und 3 gehörenden Komponenten von $\dot{\chi}$ folgen dann aus (9). Umgekehrt sind die Gleichungen (18) mit der ursprünglichen Eigenwertgleichung (8) äquivalent (jedenfalls unter

der Symmetriebedingung $\dot{\chi}_{123} = - \dot{\chi}_{132}$ ). Demnach braucht hier eine Relation $l_\mu = \frac{p_\lambda}{p^2} p_\mu a = \pm \frac{i p_\mu}{M} a$ nicht wie im Zweiteilchenfall [Bopp (1958); Gleichung (7.14) bzw. (7.30)] als wesentliche Grundgleichung der Theorie (Wellengleichung für skalare Teilchen) angesehen werden, sondern diese ist in den drei Diracgleichungen (18) bereits enthalten.

Die obigen Ergebnisse, vor allem die durch das Pauliprinzip und die Gleichungen (9) bewirkte Reduktion der ursprünglich 64 Komponenten von $\dot{\chi}$ auf zwei äquivalente Viererspinoren, die jeweils einer Diracgleichung (17) gehorchen, legen es nahe, den durch Fusion aus drei Neutrinen entstandenen Verband dem Diracschen Elektron zuzuordnen. Um diese Zuordnung nun in noch höherem Maß zu rechtfertigen, müssen wir neben der Untersuchung einer ev. inneren Struktur des Verbandes, die in §3 erfolgt, den zu $\dot{\chi}$ gehörigen Spin berechnen.

Nach Pauli (1942) hat der kovariante Spinoperator ganz allgemein die Gestalt $W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu M_{\rho\sigma}$, wo $P_\nu$ und $M_{\rho\sigma}$ die erzeugenden Operatoren der Translationen bzw. der homogenen Lorentztransformationen sind. Im vierdimensionalen Spinraum wird $W^\mu$ also durch $\frac{1}{4i} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma = \frac{1}{2} \gamma_5 (\gamma^\mu (p\gamma) - p^\mu)$ dargestellt. Entsprechend hat bei uns in dem direkten Produkt der zu den drei "Urteilchen" gehörigen Spinräume $W^\mu$ die Darstellung:

$$(19) \qquad W^\mu = \frac{1}{2} [\gamma_5 (\gamma^\mu (p\gamma) - p^\mu) \times 1 \times 1 + 1 \times \gamma_5 (\gamma^\mu (p\gamma) - p^\mu) \times 1 + 1 \times 1 \times \gamma_5 (\gamma^\mu (p\gamma) - p^\mu)] .$$

Um den Wert S des zu $\dot{\chi}$ gehörigen Spins zu finden, müssen wir beweisen, daß $\dot{\chi}$ Eigenzustand zu $- \frac{W^\mu W_\mu}{p^2}$ ist und den zugehörigen Eigenwert S(S+1) berechnen:

Zunächst ist $\gamma_5(\gamma^\mu(P\gamma) - P^\mu)\cdot\gamma_5(\gamma_\mu(P\gamma) - P_\mu) = -3P^2$,
und vermöge (17) gilt:

$$[(P\gamma)\times(P\gamma)\times 1]\,\dot{\chi} = [(P\gamma)\times 1\times(P\gamma)]\,\dot{\chi} = [1\times(P\gamma)\times(P\gamma)]\,\dot{\chi} = -M^2\dot{\chi},$$

sodaß wir erhalten:

$$-\frac{W^\mu W_\mu}{P^2}\,\dot{\chi} = \frac{9}{4}\,\dot{\chi} + \frac{1}{2}\big[(\gamma_5\times\gamma_5\times 1 + \gamma_5\times 1\times\gamma_5 + 1\times\gamma_5\times\gamma_5) +$$

$$+(\gamma^{5\mu}\times\gamma_{5\mu}\times 1 + \gamma^{5\mu}\times 1\times\gamma_{5\mu} + 1\times\gamma^{5\mu}\times\gamma_{5\mu})\big]\,\dot{\chi}.$$

Mit $\dot{\chi} = a\,v_0 + \frac{P\gamma}{P^2}\,P_\mu\,a\,v_1^\mu$ und den Regeln (13) und (14) liefert das das Ergebnis:

$$-\frac{W^\mu W_\mu}{P^2}\,\dot{\chi} = \frac{3}{4}\,\dot{\chi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dot{\chi}$$

Das Teilchen, dessen Schwerpunktsbewegung durch $\dot{\chi}$ beschrieben wird, besitzt also den Spin S = 1/2, wie es für ein Diracsches Elektron sein muß.

Im weiteren wollen wir noch auf den Masseneigenwert M dieses "Elektrons" eingehen, wie er sich in Gleichung (16) als Funktion der Wechselwirkungskonstanten $\overline{\varkappa_i}$ ergeben hat. Bei einem Vergleich mit den entsprechenden Ergebnissen der Zweiteilchenfusion [Gleichungen (7.23) und (7.29) bei Bopp (1958)] fällt auf, daß wir (abgesehen vom Vorzeichen) nur einen Masseneigenwert erhalten haben und daß dieser linear von den $\overline{\varkappa_i}$ abhängt.

Das Auftreten nur einer Masse M hat ihre Ursache größtenteils in dem Ankleben des Isospins, das zu einer Reduktion der Komponenten von $\dot{\chi}$ geführt hat. Im Zweiteilchenfall wurden durch diesen Prozeß die möglichen Symmetrieklassen für den Schwerpunktsspinor $\psi_{12}(0)$ (symmetrische und antisymmetrische Klasse) nicht einge-

schränkt, weil ja auch der zugehörige Isospinvektor antisymmetrisch oder symmetrisch sein kann. Bei drei "Urteilchen" existiert jedoch kein vollständig antisymmetrischer Isospinor. Dadurch wird nach dem Pauliprinzip ein vollständig symmetrisches $\mathring{\chi}$ ausgeschlossen, das zu Teilchen mit Spin 3/2 geführt hätte, und außerdem neben dem Massenwert M der Gleichung (16) zu einem zweiten, freilich wieder linearen Massenausdruck $M' = \pm 3(\bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1 + \bar{\varkappa}_2 + \bar{\varkappa}_3)$ Anlaß gegeben hätte.

Für die Linearität von M würde man zunächst vielleicht die Zweikörperwechselwirkungen verantwortlich machen. Wenn auch diese Eigenschaft von W sicher von wesentlichem Einfluß auf die Auswertung der Gleichung (8) und das Ergebnis für M ist, so möchten wir den tieferen Grund doch in der Kinematik erblicken, genauer in dem Operator $[p^2(p\gamma_1 + p\gamma_2 + p\gamma_3) + (p\gamma_1)(p\gamma_2)(p\gamma_3)]$ auf der linken Seite von Gleichung (8). Dieser hat nämlich die Relation (9) zur Folge, die den Spinor $\mathring{\chi}$ in sehr viel stärkerem Maße reduziert (unabhängig von der Reduktion durch die Symmetriebedingungen!) als das bei den äquivalenten Zweiteilchenrelationen der Fall ist. An der Gleichung

$$(15') \quad \left(\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2} + 2\bar{\varkappa}_0 + 2\bar{\varkappa}_1\right)(a v_0 + b_\mu v_1^\mu) = i(p\gamma_1)(a v_0 + b^\mu v_{1\mu})$$

und ihrer Ableitung aus den vorhergehenden Zeilen kann man dann besonders gut verfolgen, wie erst die aus (9) folgende Reduktion $b_\mu = \frac{p\chi_1}{p^2} p_\mu a$ dafür sorgt, daß die Komponenten $v_0$ und $v_{1\mu}$ mit demselben Wechselwirkungsausdruck $\left(\frac{\varkappa_0+\varkappa_1}{2} + 2\bar{\varkappa}_0 + 2\bar{\varkappa}_1\right)$ multipliziert werden und zu äquivalenten Eigenwertgleichungen führen. Bei der Zweiteilchengleichung traten die entsprechenden Koeffizienten a, $b_\mu$ gemischt auf und waren außerdem mit verschiedenen Wechselwirkungsfaktoren multipliziert, was einen quadratischen Massen-

term $M = \pm \sqrt{\varkappa_0 \varkappa_i}$ ergab. Es ist interessant, daß auch bei der Fusion von vier Teilchen - wie etwas aufwendigere, aber nicht prinzipiell schwierigere Rechnungen zeigen - die Masseneigenwerte des Verbandes linear von den $\varkappa_i$ abhängen. Sollte sich diese Eigenschaft auf sämtliche höheren Fusionsstufen übertragen, so könnte das allerdings kritische Folgen haben. Es ist dann nämlich zu erwarten, daß das Massenspektrum der Boppschen Mehrteilchengleichungen zu einfach ist, um sämtliche experimentellen Massen mit ihren richtigen Zahlenwerten zu liefern.

Der Vollständigkeit halber wollen wir unsere Ergebnisse dieses Paragraphen nun noch mit verwandten Rechnungen aus der Literatur vergleichen: Lubanski (1942a,b), Bauer (1949) und Hönl, Boerner (1950) untersuchen im Anschluß an die de Broglieschе Fusionstheorie die Gleichung $(\beta^\mu \partial_\mu + 3\varkappa)\,\psi = 0$ mit $\beta^\mu = \gamma^\mu \times 1 \times 1 + 1 \times \gamma^\mu \times 1 + 1 \times 1 \times \gamma^\mu$, und suchen deren irreduzible Anteile sowie die zugehörigen Wellengleichungen auf. An Stelle unserer Spinoperatoren $W_{ik}$ steht hier also ein mehr oder weniger ad hoc eingeführter Massenterm $3\varkappa$. Die Massen der durch die Gleichung beschriebenen Teilchen sind also nicht dynamische Größen, sondern bestimmen sich in ganz einfacher Weise aus der von Null verschiedenen Masse $\varkappa$ des zugrundeliegenden Diracteilchens. Andrerseits bewirkt das Auftreten von nur vier Spinoperatoren $\beta^\mu$ eine Reduktion im 64-dimensionalen Spinraum, die noch über die in §1 behandelte Aufspaltung nach Symmetrieklassen hinausgeht. Dagegen sind bei uns die einzelnen Symmetrieanteile der Gleichung (8) bereits irreduzibel, weil in den Wechselwirkungstermen neben $\beta^\mu$ noch Spinoperatoren wie $\gamma^{\mu\nu} \times 1 \times 1 + 1 \times \gamma^{\mu\nu} \times 1 + 1 \times 1 \times \gamma^{\mu\nu}$ auftreten, die - anders als bei den gewöhn-

lichen Diracmatrizen - nicht aus $\beta^\mu$ aufgebaut werden können. Aber selbst wenn wir $W_{ik} = -\varkappa$ setzen, unterscheidet sich unsere Gleichung (8) noch ganz charakteristisch von der von Lubanski u.a. betrachteten: Die Einführung eigener Ortskoordinaten für jedes "Urteilchen" und die dadurch ermöglichte dynamische Beschreibung der Fusion gibt nicht nur zu einer raumzeitlichen Struktur der fusionierten Teilchen Anlaß (vgl. §3), sondern reduziert auch die möglichen Schwerpunktsbewegungen ganz erheblich; um nämlich aus dem ursprünglichen kinematischen Operator $(\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3)$ der Gleichung (1) sämtliche Relativkoordinaten zu eliminieren, muß (im Impulsraum) mit Operatoren wie $Z_{123}(k,p)$ multipliziert werden. Dadurch entsteht schließlich in Gleichung (8) der im Vergleich zu $\beta^\mu\partial_\mu$ außerordentlich singuläre Operator $[P^2(P\gamma_1 + P\gamma_2 + P\gamma_3) + (P\gamma_1)(P\gamma_2)(P\gamma_3)]$, der den Spinraum auf 8 Komponenten reduziert und als einzige (Schwerpunkts-) Wellengleichung nur mehr die Diracgleichung (18) zuläßt.

Zum Schluß möchten wir noch einige Anmerkungen zu einem Problem bringen, das bei Fusion von "Urteilchen" zu neuen Elementarteilteilchen, weitgehend unabhängig vom speziellen Modell oder der Fusionsstufe, zu Verständnisschwierigkeiten führt, Das Problem kann etwa folgendermaßen formuliert werden: Wenn zwei oder mehr Teilchen einen stabilen Verband (ein neues Elementarteilchen) bilden sollen, dann müssen zwischen ihnen anziehende Kräfte herrschen; die Masse des neuen Teilchens muß also gleich der Summe der Teilmassen sein, vermindert um die Bindungsenergie. Wie ist es da möglich, daß wir durch Fusion masseloser Neutrinen neue Teilchen mit endlicher Masse erhalten?

Zu diesem Einwand ist zunächst zu sagen, daß er anschauliche Begriffe wie 'anziehende Kraft' und 'Bindungsenergie' verwendet, die aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik, ja aus der klassischen Physik übernommen sind und in einer streng relativistischen Theorie keinen Sinn mehr haben. Auf ein solches Versagen physikalischer Begriffe im relativistischen Bereich haben schon sehr früh Landau, Peierls (1931) in radikaler Weise aufmerksam gemacht. In jüngerer Zeit machen sich Schwierigkeiten dieser Art vor allem bei den Kern-"Kräften" bemerkbar (vgl. etwa Nambu (1950)). Besonders deutlich kann man die nur näherungsweise Brauchbarkeit des Begriffs 'Bindungsenergie' an einer Arbeit von Thirring (1950) verfolgen, der die der Boppschen Theorie verwandte Gleichung $(\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \mu_1 + \mu_2 + W(x_1,x_2))\,\psi = 0$ in sukzessiven relativistischen Näherungen untersucht. Es ist danach gut verständlich, daß auch die Fusion höchstens in einer ersten Näherung mit den quantenmechanischen Bindungskräften der nichtrelativistischen Atom- und Molekülphysik verglichen werden kann, daß aber die strengen Fusionsgleichungen als zunächst mehr formale Beschreibung der Elementarteilchen durch mehrere Variable anzusehen sind.

Es bleibt dann freilich immer noch der in gewisser Weise komplementäre Einwand bestehen, warum das fusionierte, massebehaftete Teilchen nicht in den energetisch günstigeren Zustand der freien Neutrinen "zerfällt", der ebenfalls eine Lösung der Boppschen Gleichung ist. Eine solche Frage kann natürlich im Augenblick nicht vollständig beantwortet werden, weil die fusionierten Teilchen sich ja nur als formale Lösungen der Boppschen Gleichungen ergeben haben, über ihre physikalische Verwirklichung als Elementarteilchen mit

allen dazu erforderlichen Eigenschaften oder gar über die Stabilität dieser Teilchen aber noch sehr wenig bekannt ist. (Man könnte z.B. an Übergangsverbote zwischen verschiedenen Lösungen dieser Gleichungen denken). Es muß jedoch betont werden, daß obiger Einwand insofern seiner Grundlage entbehrt, als die Eigenwertgleichungen sowohl im Zweiteilchen- wie im Dreiteilchenfall die Fusionsmasse nur bis aufs Vorzeichen bestimmen und folglich positive und negative Massen (bzw. Energien) stets zusammen auftreten, wie das von der Diracschen Theorie her gut bekannt ist. Da wir diese Schwierigkeit nicht wie in der Quantenfeldtheorie umgehen können, muß sich natürlich erst herausstellen, welche Folgen das gleichzeitige Auftreten positiver und negativer Massen an anderer Stelle, vor allem für die Wechselwirkung fusionierter Teilchen hat. Eine Notwendigkeit zum Zerfall eines fusionierten Teilchens in freie Neutrinen sollte aber jedenfalls nicht bestehen.

## §3. Zur Raum-Zeitstruktur der Lösungen.

Um die Äquivalenz zwischen den fusionierten Teilchen und den experimentell in Erscheinung tretenden Elementarteilchen nun noch genauer zu prüfen, müssen wir die raumzeitliche Struktur der Lösungen von Gleichung (1) berechnen. An dem Ergebnis gerade dieser Aufgabe sollte schließlich entschieden werden können, ob die Boppsche Fusionstheorie geeignet ist, neben der Beschreibung der freien Elementarteilchen auch das bisher weitgehend ungelöste Problem ihrer Wechselwirkungen erfolgreich in Angriff zu nehmen.

In §1 wurde bereits bemerkt, daß man zur Auffindung der vollständigen Lösung $\psi_{123}(y_1, y_2, y_3)$ zunächst die Fouriertransformierten $\chi^i(k)$ bestimmen muß. Aus dem Gleichungssystem (7) entnehmen wir, daß die drei Funktionen $\chi^i(k)$ in gleicher Weise von ihrem Argument k abhängen, weil die Gleichungen (7) bis auf die Umstellung von Spinorindizes miteinander identisch sind. Da es uns im Augenblick nicht auf das spezielle Verhalten der Lösungen im Spinraum, sondern auf deren Struktur im Ortsraum ankommt, brauchen wir nur die erste der Gleichungen (7) untersuchen und multiplizieren sie dazu mit dem Operator $\left[(P\Gamma_{23})\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1+\left(\frac{2P^2}{3}-Pk\right)\right]$. Das ergibt:

$$\left[(P\Gamma_{23})\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1+\left(\frac{2P^2}{3}-Pk\right)+i(P\Gamma_{23})W_{23}\right]\chi^1(k)=$$

$$=-i(P\Gamma_{23})(W_{31}+W_{12})\dot{\chi}\,. \qquad (20)$$

Da wir den Operator der linken Seite nicht unmittelbar invertieren können, was einen expliziten Ausdruck für $\chi^1(k)$ ergeben würde, zerlegen wir die Gleichung (20) wie in §2 nach den einzelnen Spinorkomponenten. Dabei sollten wir eigentlich, wie auf Seite 28 betont wurde, auch die bzgl. Teilchen 2 und 3 symmetrischen Komponenten von $\mathring{\chi}$ mitnehmen (um z.B. die Äquivalenz der Gleichungen (7) zu wahren), d.h. wir sollten für $\mathring{\chi}$ den vollständigen Ansatz (10) machen. Es stellt sich jedoch heraus, daß bei der folgenden Relation (22) die Komponenten $\tilde{c}_{\mu\nu}$ und $d_\mu$ zu äquivalenten Gleichungen führen (nur die Konstanten $\varkappa_i$ und $\bar{\varkappa}_i$ werden abgeändert!), auf die wir im Rahmen unserer prinzipiellen Strukturuntersuchungen verzichten können. Wir dürfen also auch für $\chi^1(k)$ einen gemäß (10a) reduzierten Ansatz benützen:

$$\chi^1(k) = A\, v_0 + B_\mu v_1^\mu + E\, v_4 \,, \tag{21}$$

wobei hier die Spinoren A, $B_\mu$ und E natürlich vom Impuls k abhängen.

Wenn man Gleichung (20) mit dem Operator $(\not{p}\gamma_2 - \not{p}\gamma_3)$ multipliziert, erhält man $(\not{p}\gamma_2 - \not{p}\gamma_3)\,\chi^1(k) = 0$, was die Relationen $B_\mu = \frac{p_\mu}{p^2}(p^\nu B_\nu)$ und E=0 zur Folge hat. Damit bekommt die Gleichung (20) dann die folgende Gestalt:

$$\left(\frac{\not{p}}{3} + \not{k}\right)\gamma_1\left[p^\mu A\, v_{1\mu} + (p^\mu B_\mu)\, v_0\right] + \left(\frac{2p^2}{3} - \not{p}\not{k}\right)\left[A\, v_0 + \frac{p_\mu}{p^2}(p^\nu B_\nu)\, v_1^\mu\right] +$$

$$+ i\left[\varkappa_0\, p^\mu A\, v_{1\mu} + \varkappa_1 (p^\mu B_\mu)\, v_0\right] = -2i\,(\bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1)\left[(\not{p}\gamma_1)\, a\, v_0 + p^\mu a\, v_{1\mu}\right]$$

Die Einzelgleichungen für die linear unabhängigen Spinorkomponenten lauten demnach:

$$v_0 : \left[\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1 + i\varkappa_1\right](P^\mu B_\mu) + \left(\frac{2P^2}{3} - Pk\right) A = -2i(\bar{\varkappa}_0+\bar{\varkappa}_1)(P\gamma_1)\,a$$

$$v_1^\mu : P_\mu\left[\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1 + i\varkappa_0\right] A + \frac{P_\mu}{P^2}\left(\frac{2P^2}{3} - Pk\right)(P^\nu B_\nu) = -2i(\bar{\varkappa}_0+\bar{\varkappa}_1) P_\mu\, a.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit $P^\mu$ und kombiniert dann die beiden Gleichungen geeignet, so erhält man für A und $(P^\mu B_\mu)$ die Bestimmungsgleichungen:

$$\left[\frac{P^2}{3} - 2Pk - k^2 + \frac{(Pk)^2}{P^2} + \varkappa_0\varkappa_1 - i(\varkappa_0+\varkappa_1)\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1\right] A =$$

$$= 2i(\bar{\varkappa}_0+\bar{\varkappa}_1)\left\{\left[\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1 + i\varkappa_1\right](P\gamma_1) - \left(\frac{2P^2}{3} - Pk\right)\right\}\frac{P\gamma_1}{P^2}\,a$$

(22)

$$\left[\frac{P^2}{3} - 2Pk - k^2 + \frac{(Pk)^2}{P^2} + \varkappa_0\varkappa_1 - i(\varkappa_0+\varkappa_1)\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1\right](P^\mu B_\mu) =$$

$$= 2i(\bar{\varkappa}_0+\bar{\varkappa}_1)\left\{\left[\left(\frac{P}{3}+k\right)\gamma_1 + i\varkappa_0\right](P\gamma_1) - \left(\frac{2P^2}{3} - Pk\right)\right\}\frac{P\gamma_1}{P^2}(P^\mu b_\mu).$$

Da die beiden Gleichungen fast identisch sind, genügt im folgenden die Diskussion der Gleichung für A. Außerdem wollen wir uns auf das Koordinatensystem spezialisieren, in dem der Schwerpunkt des Dreiteilchenverbandes ruht: $P_\mu=(M,0,0,0)$. Dadurch wird einerseits erreicht, daß die Rechnungen nicht allzu unübersichtlich werden, zum andern erscheint diese Wahl auch vom physikalischen Standpunkt aus angemessen; denn die Schwerpunktsbewegung ist uns ja vom vorhergehenden Abschnitt schon gut bekannt, und eine innere Struktur des fusionierten Teilchens läßt sich natürlich im Ruhsystem am besten diskutieren.

Die Gleichung für A lautet dann mit $k_\mu=(\omega,\mathfrak{k})$:

$$\left[\frac{M^2}{3} - 2Mw + p^2 - x_0 x_1 + i(x_0+x_1)\left(\frac{p}{3}+k\right)\gamma_1\right] A =$$

$$= -2i(\bar{x}_0+\bar{x}_1)\left[\left(\frac{p}{3}+k\right)\gamma_1 + ix_1 \pm i\left(\frac{2M}{3}-w\right)\right] a ,$$

und man erhält für A(k) den expliziten Ausdruck:

$$(23)\qquad A(k) = \frac{\frac{M^2}{3} - 2Mw + p^2 - x_0 x_1 - i(x_0+x_1)\left(\frac{p}{3}+k\right)\gamma_1}{\left[\frac{M^2}{3} - 2Mw + p^2 - x_0 x_1\right]^2 + (x_0+x_1)^2\left(\frac{p}{3}+k\right)^2} \cdot 2(\bar{x}_0+\bar{x}_1)\left[x_1 \pm \right.$$

$$\left. \pm\left(\frac{2M}{3}-w\right) - i\left(\frac{p}{3}+k\right)\gamma_1\right] a .$$

Es bestünde nun die Aufgabe, diesen Wert von A(k) sowie äquivalente Ausdrücke für die anderen Komponenten von $\chi^1(k)$, $\chi^2(k)$ und $\chi^3(k)$ in die Gleichung (5) von §1 einzusetzen und die so gewonnene Funktion $\psi_{123}(k,p)$ in den Ortsraum zu transformieren. Angesichts der Komplexheit, die bereits die Formel (23) besitzt, ist jedoch zu erwarten, daß die vollständige Lösung dieser Aufgabe unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten bereitet und auch nicht zu übersichtlichen physikalischen Resultaten führt. Wir wollen uns deshalb der Behandlung einer etwas einfacheren Spezialaufgabe zuwenden, die einerseits als Orientierung für möglicherweise geeignete Rechenmethoden dienen kann, andrerseits auch eine Vorstellung von den zu erwartenden Lösungen und deren physikalischer Interpretation vermittelt.

In §1 hatten wir gesehen, daß $\chi^1(k)$ die Fouriertransformierte von $\psi_{123}\left(y_1, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right) e^{-ipx}$ ist. Wenn wir also mit dem Ausdruck (23) die Ortsfunktion $A(x) = (2\pi)^{-4} \int dk\, A(k) e^{ikx}$ bilden, erfahren wir, wie die Funktion $\psi_{123}(y_1,y_2,y_3)$ von dem Relativabstand $x = y_1 - \frac{y_2+y_3}{2}$ abhängt, sobald sich nur die Teilchen 2 und 3

am selben (Vierer-) Ort befinden; denn nach obigem kann A(k) in seiner k-Abhängigkeit als Repräsentant für die volle Funktion $\chi^{-1}(k)$ angesehen werden. Das bevorstehende Integrationsproblem können wir uns ganz wesentlich vereinfachen, wenn wir den Zähler von A(k) zunächst durch 1 ersetzen und die von k abhängigen Terme hintennach durch Ableitungen nach x berücksichtigen.

Wir berechnen also im folgenden das Integral:

$$(24) \qquad \overline{A(x)} = (2\pi)^{-4} \int dk \, \frac{e^{ikx}}{\left[\frac{M^2}{3} - 2M\omega + \mathfrak{p}^2 - x^2\right]^2 + 4x^2\left(\frac{\mathfrak{p}}{3} + k\right)^2},$$

wobei noch $x_0 = x_1 = x$ gesetzt wurde, damit in den Nullstellen des Nenners keine Wurzeln auftreten, die die Rechnungen erheblich komplizieren würden. Wie in §1 festgelegt wurde, soll von der vierdimensionalen k-Integration zuerst die Komponente $\omega$ ausgeführt werden, und die Nullstellen des Nenners sind nach der Hauptwertvorschrift auszuwerten. Sie können an der Gestalt

$$N = 4(M^2 - x^2)\left[\omega - \left(\frac{M}{6} + \frac{x}{2}\right) - \frac{\mathfrak{p}^2}{2(M+x)}\right]\left[\omega - \left(\frac{M}{6} - \frac{x}{2}\right) - \frac{\mathfrak{p}^2}{2(M-x)}\right]$$

des Nenners besonders schön abgelesen werden. Die $\omega$-Integration liefert dann das Ergebnis:

$$\overline{A(x)} = -\frac{i\eta(i\tau)}{(2\pi)^3} \, \frac{e^{-i\frac{M}{6}\tau}}{4x} \int d\mathfrak{p} \, \frac{e^{i\mathfrak{p}\varrho}}{M^2 - x^2 - \mathfrak{p}^2} \left[e^{-i\tau\left(\frac{x}{2} + \frac{\mathfrak{p}^2}{2(M+x)}\right)} - e^{-i\tau\left(-\frac{x}{2} + \frac{\mathfrak{p}^2}{2(M-x)}\right)}\right]$$

wobei $x = (\tau, \varrho)$ ist. Da der Integrand unter dem Fourierintegral nur von $\mathfrak{p}^2$ abhängt, können wir die Winkelintegrationen unmittelbar ausführen und erhalten eine Lösung, die nur mehr von $\tau$ und $|\varrho| = r$ abhängt:

$$(25)\quad \overline{A(x)} = \frac{1}{16\pi^2 x}\,\frac{\eta(\tau)}{\tau}\,e^{-i\frac{M}{6}\tau}\left[e^{-\frac{i\tau x}{2}}\right]\mathcal{J}(\tau,\tau;x) - e^{\frac{i\tau x}{2}}\mathcal{J}(\tau,\tau;-x)$$

mit der Abkürzung:

$$\mathcal{J}(\tau,\tau;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\,\frac{p}{p^2-(M^2-x^2)}\,e^{i\left(p\tau - \frac{\tau p^2}{2(M+x)}\right)}$$

Bei der Auswertung des Integrals J müssen wir nun die beiden Fälle $M^2 < x^2$ und $M^2 > x^2$ unterscheiden:

1.) $M^2 - x^2 = -\varrho^2 < 0$; außerdem setzen wir noch $\frac{\tau}{2(M+x)} = \alpha$.

$$\mathcal{J}_1(\tau,\tau;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\,\frac{p}{p^2+\varrho^2}\,e^{i(p\tau-\alpha p^2)} = e^{\frac{i\tau^2}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p\,dp}{p^2+\varrho^2}\,e^{-i\alpha\left(p-\frac{\tau}{2\alpha}\right)^2}$$

Durch die Variablentransformation $\left(p-\frac{\tau}{2\alpha}\right)^2 = q$ kommen wir zu der Form:

$$\mathcal{J}_1(\tau,\tau;x) = \frac{\tau}{2\alpha}\,e^{\frac{i\tau^2}{4\alpha}}\int_0^{\infty} dq\,\frac{e^{-i\alpha q}}{\sqrt{q}}\,\frac{-q+\left(\varrho^2+\frac{\tau^2}{4\alpha^2}\right)}{\left[q-\left(\frac{\tau}{2\alpha}+i\varrho\right)^2\right]\left[q-\left(\frac{\tau}{2\alpha}-i\varrho\right)^2\right]} =$$

$$= -\frac{\tau}{2\alpha}\,e^{\frac{i\tau^2}{4\alpha}}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\varrho\alpha}{\tau}\right)\int_0^{\infty} dq\,\frac{e^{-i\alpha q}}{\sqrt{q}\left[q-\left(\frac{\tau}{2\alpha}+i\varrho\right)^2\right]} + \left(\frac{1}{2}-\frac{i\varrho\alpha}{\tau}\right)\int_0^{\infty} dq\,\frac{e^{-i\alpha q}}{\sqrt{q}\left[q-\left(\frac{\tau}{2\alpha}-i\varrho\right)^2\right]}\right\}$$

Aus Tafeln über Fouriertransformation (z.B. Oberhettinger (1957), Seite 2 und Seite 111) entnimmt man die Formel:

$$\int_0^{\infty} dq\,\frac{e^{-i\alpha q}}{\sqrt{q}\,(q+q_0)} = \frac{\pi}{\sqrt{q_0}}\,e^{i\alpha q_0}\,\mathrm{Erfc}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha q_0}\right)$$

mit der Definition: $\mathrm{Erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-t^2}\,dt$

Dabei ist die komplexe $q_0$-Ebene längs der negativ reellen Achse aufgeschnitten, und es ist das Blatt zu nehmen, in dem $\sqrt{q_0}$ für positiv reelle $q_0$ positive Werte annimmt. Die Konstante $\alpha$ sei dabei im Augenblick als positiv angenommen; an dem Integral sieht man übrigens unmittelbar, daß der Übergang zu negativem $\alpha$ mit dem Übergang zum konjugiert komplexen Ergebnis identisch ist.

Bei uns hat $q_0$ die Werte $-\left(\frac{\tau}{2\alpha} \pm i\varrho\right)^2$, und folglich ist $\sqrt{q_0} = \varrho \mp \frac{i\tau}{2\alpha}$. Das endgültige Ergebnis für unsere gesuchte Funktion lautet damit:

$$J_1(\tau, r; \alpha) = -\frac{i\pi}{2} e^{i\alpha\varrho^2}\left\{ e^{r\varrho}\, \mathrm{Erfc}\left[e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha}\left(\varrho - \frac{i\tau}{2\alpha}\right)\right] - e^{-r\varrho}\, \mathrm{Erfc}\left[e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha}\left(\varrho + \frac{i\tau}{2\alpha}\right)\right]\right\} \tag{26a}$$

(für negative $\alpha$ ist das Vorzeichen von $\sqrt{\alpha}$ so zu wählen, daß ein negativ imaginärer Wert entsteht).

2.) $M^2 - \varkappa^2 = \sigma^2 > 0$.

$$J_2(\tau, r; \varkappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \frac{p}{p^2 - \sigma^2}\, e^{i(p\tau - \alpha p^2)}.$$

Im Gegensatz zum Integral $J_1$ treten hier Pole im Integranden auf. Wir wollen in der komplexen p-Ebene den Pol bei $p=+\sigma$ oben, den Pol bei $p=+\sigma$ unten umgehen ($\sigma > 0$). In der anschließenden Diskussion der Ergebnisse werden wir sehen, inwiefern dieser Integrationsweg physikalisch ausgezeichnet ist.

Mit Hilfe derselben Methoden wie unter 1.), wobei die Integrationsvorschriften natürlich entsprechend in die q-Ebene zu übersetzen sind, erhalten wir das Ergebnis:

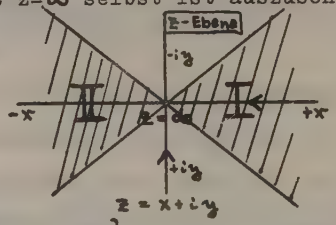
$$\mathfrak{J}_2(\tau,r;\varkappa) = -\frac{i\pi}{2}\, e^{-i\varkappa\sigma^2}\left\{e^{-i\varkappa\sigma}\,\mathrm{Erfc}\left[e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\varkappa}\left(\sigma+\frac{r}{2\varkappa}\right)\right]\right.$$

(26 b)

$$\left. - e^{i\varkappa\sigma}\,\mathrm{Erfc}\left[e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\varkappa}\left(\sigma-\frac{r}{2\varkappa}\right)\right]\right\}.$$

( $\mathfrak{J}_2(\tau,r;\varkappa)$ entsteht aus $\mathfrak{J}_1(\tau,r;\varkappa)$, wenn man darin $\varsigma = -i\sigma$ setzt).

Wenn wir nun die unter 1.) und 2.) erhaltenen Ergebnisse diskutieren wollen und ihre Brauchbarkeit innerhalb unseres physikalischen Modells untersuchen, müssen wir für die Funktion Erfc(z) eine asymptotische Entwicklung haben; denn physikalisch interessiert der Fall großer r und nicht zu großer Zeitdifferenzen $\tau$, was gemäß (26) zu großen Argumenten der Funktion Erfc(z) führt.
Die Definition $\mathrm{Erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2}\,dt$ ist so gemeint, daß die obere Grenze des Integrals von der positiv reellen Achse der t-Ebene her erreicht wird.
Eine asymptotische Entwicklung von Erfc(z) ist nur in den Bereichen I und II der nebenstehenden Figur möglich, d.h. asymptotisch muß $|\mathrm{Re}\ z| > |\mathrm{Im}\ z|$ gelten, und der Punkt $z=\infty$ selbst ist auszuschließen.




Im Bereich I gilt nach Jahnke-Emde-Lösch (1960), Seite 26 die folgende asymptotische Entwicklung:

$$\mathrm{Erfc}(z)_I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-z^2}}{z}\left\{1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1\cdot 3}{(2z^2)^2} - + \cdots\right\}$$

$(z\to\infty;\ \mathrm{Re}\ z > |\mathrm{Im}\ z|)$.

Liegt z im Bereich II, so führt der Integrationsweg notwendig über das Endliche, weil ja die obere Integrationsgrenze vom Bereich I

her erreicht werden soll. Man schreibt hier am besten:

$$Erfc(z)_{II} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_{z}^{-\infty} e^{-t^2} dt \right) = 2 - Erfc(-z).$$

Nun liegt -z im Bereich I, und man kann obige Entwicklung übernehmen:

$$Erfc(z)_{II} = 2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} \left\{ 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2z^2)^2} - + \cdots \right\}$$

$(z \to \infty ; \; Re\, z < -|Im\, z|)$.

Bei unseren Formeln (26) liegt jeweils ein Argument der Funktion Erfc(z) im Bereich I, das andere im Bereich II, sodaß die asymptotischen Entwicklungen gelten:

(27)

$$J_1(\tau, r; \alpha) = i\pi \, e^{i\alpha\beta^2} e^{-\beta r} + \frac{1-i}{r} \sqrt{2\alpha\pi} \, e^{\frac{ir^2}{4\alpha}} \left[ 1 - \frac{2i\alpha}{r^2} - \frac{4\beta^2\alpha^2}{r^2} \left( 1 + \frac{3}{\beta^2 r^2} \right) + \cdots \right]$$

$$J_2(\tau, r; \alpha) = i\pi \, e^{-i\alpha\beta^2} e^{i\beta r} + \frac{1-i}{r} \sqrt{2\alpha\pi} \, e^{\frac{ir^2}{4\alpha}} \left[ 1 - \frac{2i\alpha}{r^2} + \frac{4\beta^2\alpha^2}{r^2} \left( 1 - \frac{3}{\beta^2 r^2} \right) + \cdots \right].$$

Betrachten wir vorerst nur die Hauptglieder dieser Reihen, die proportional $e^{-\beta r}$ bzw. $e^{i\beta r}$ sind und denken uns diese mit dem Vorfaktor $\frac{\eta(\tau)}{r} e^{-i\frac{\pi}{6}\tau} \cdot e^{\mp \frac{i\beta\alpha}{2}}$ von Formel (25) multipliziert, so scheinen diese Terme einer physikalischen Interpretation durchaus zugänglich zu sein: $\frac{e^{-\beta r}}{r}$ beschreibt eine für große r stark abfallende Funktion; die von der Relativzeit $\tau$ abhängigen Faktoren sind periodisch und vom Betrag 1 und somit z.B. für eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation uninteressant (diese Unabhängigkeit von $\tau$ hat man bei ruhendem Schwerpunkt gemäß der Blochschen Interpretation [Bloch (1934)] auch physikalisch zu erwarten). $\frac{e^{i\beta r}}{r}$ stellt eine auslaufende Kugelwelle dar - durch den speziellen Integrationsweg in 2.) haben wir einlaufende Anteile eliminiert! - , die möglicherweise mit der Streuung eines Neutrinos an einem fusionierten Paar

in Verbindung gebracht werden kann (vgl. §4).
Will man die Spekulation noch etwas weiter treiben, so hängt die Grenze $M^2=\varkappa^2$ zwischen den Lösungen $J_1$ und $J_2$ mit der Fusionsmasse $M_1= \pm \sqrt{\varkappa_0 \varkappa_1} = \pm \varkappa$ vom Zweiteilchenfall zusammen: Bei der Streuung eines Neutrinos an einem fusionierten Paar muß die Gesamtenergie E des Dreiteilchensystems, die im Fall P=(M,0,0,0) mit M übereinstimmt, notwendig größer als die Fusionsmasse $\varkappa$ sein, also $M^2 - \varkappa^2 > 0$, was unter den Fall 2.) fällt und die auslaufende Kugelwelle liefert. In der Fusionsmasse $M = \pm 3(\bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1 - \bar{\varkappa}_2 - \bar{\varkappa}_3)$ des Dreiteilchenverbandes müßten dann die $\bar{\varkappa}_i$ so gewählt werden, daß $M^2 - \varkappa^2 < 0$ gilt, die zu dem fusionierten Teilchen gehörige Wellenfunktion also mit r rasch abnimmt.

Diese Interpretationsversuche erleiden jedoch wenigstens im Fall $M^2 > \varkappa^2$ eine erhebliche Einbuße, wenn wir die Hilfsfunktionen $J_1$ bzw. $J_2$ aus (27) nun in die Formel (25) für $\overline{A(x)}$ einsetzen, weil dabei die "Hauptglieder" gegeneinander wegfallen und die nächstfolgenden Glieder in den Reihen (27) ein wesentlich anderes Verhalten zeigen. Wir wollen deshalb die Rechnungen hier nicht mehr in Einzelheiten weiterführen und auch die Berücksichtigung des Zählers von (23) durch Ableitungen nach $\tau$ und $\varkappa_0$ fallen lassen, weil wir davon keine interessanten Ergebnisse mehr erwarten.

Trotzdem scheinen uns die obigen Teillösungen insofern nützlich zu sein, als sie zeigen, daß die vom Zweiteilchenfall übernommene Integrationsvorschrift (§1, Seite 18) auch beim wesentlich komplizierteren Dreiteilchenproblem zu Lösungen führen kann, die von der Relativzeit weitgehend unabhängig sind (jedenfalls dem Absolutquadrat nach). Außerdem sind nun innerhalb derselben Integrationsvorschrift offenbar auch Lösungen vom Typ einer Streuwelle prinzipiell

möglich, weil nach der $\omega$-Integration noch weitere "räumliche" Pole im Integranden auftreten, die entsprechend ausgewertet werden können. Ein sehr bemekenswertes Ergebnis, das aus den bisherigen Rechnungen bereits mit Sicherheit folgt, ist, daß im Gegensatz zum Zweiteilchenfall die Fusion von drei "Urteilchen" einen räumlich ausgedehnten Verband liefert.

Daß die Lösungen für $\psi_{123}(y_1, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2})$ noch keine physikalisch plausible Gestalt haben, darf schon deshalb nicht allzusehr überraschen, weil wir ja dabei (künstlich) die Teilchen 2 und 3 am selben Viererort festhalten. Aus der rationalen Gestalt der Fouriertransformierten geht aber unmittelbar hervor, daß das Verhalten der Funktionen im Ortsraum ganz empfindlich davon abhängt, ob die einzelnen Zeitkoordinaten identisch oder verschieden sind, z.B. ist $\psi_{123}(x, \xi)$ im Fall $t_1=t_2=t_3$ proportional zu $\delta(x_0)\delta(\vec{\xi})$, für verschiedene Teilchenzeiten aber räumlich ausgedehnt. Dieses singuläre Verhalten bei Gleichzeitigkeit ist uns ja von der Zweiteilchengleichung her schon bekannt, und wir werden darauf in §5 noch genauer eingehen.

Die Lösung $\psi_{123}(y_1, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2})$ könnte nur dann als Repräsentant für die allgemeine Wellenfunktion angesehen werden, wenn $\psi_{123}(y_1, y_2, y_3)$ die Gestalt $e^{ipX}[\varphi_1(y_1-\frac{y_2+y_3}{2})\delta(y_2-y_3)+\varphi_2(y_2-\frac{y_2+y_3}{2})\delta(y_3-y_1)$ $+\varphi_3(y_3-\frac{y_2+y_3}{2})\delta(y_1-y_2)]$ hätte. Das ist aber offensichtlich nicht der Fall, weil die Fouriertransformierte $\tilde{\psi}_{123}(k,p)$ gemäß (5) nicht als Summe von drei Termen geschrieben werden kann, die nur von k bzw. (p-k/2) bzw. (-p-k/2) abhängen. Nach einem Vorschlag von Bopp kann man zwar diese Gestalt durch eine Abänderung der Wechselwirkung in der Grundgleichung, nämlich durch die Ersetzung von $W_{ik}$ $(y_i-y_k)$ durch $[W_{ik}+(y_i-y_k)\partial_{y_i-y_k}]\delta(y_i-y_k)$ erzwingen, doch ist einer-

seits der Zusatzterm nicht unmittelbar physikalisch verständlich, andrerseits sind die Lösungen der modifizierten Gleichung im Rahmen einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation für Mehrzeitfunktionen unbrauchbar.

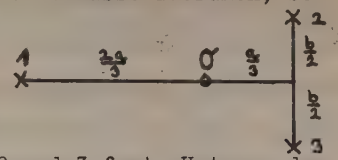
Um nun wenigstens noch eine Vorstellung davon zu vermitteln, welches Ergebnis wir von der Fusion dreier Neutrinen physikalisch erwarten und wie das in der Einführung erwähnte "Coulombfeld des Elektrons" gemeint ist, verfolgen wir den Weg rückwärts von den hypothetischen Eigenschaften des Fusionsverbandes zu der Wellenfunktion. Dabei wollen wir von den Relativzeiten einmal völlig absehen.

Ein "Elektron" sei also ein Verband aus drei Neutrinen, die mit einer isotropen Dichteverteilung $\frac{1}{r^2}$ um ihren Schwerpunkt gruppiert sind. Wenn sich nun zwei solche Elektronen an den Orten $\mathfrak{r}_1 = 0$ und $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{a} = a \cdot \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}^2 = 1$ befinden, so überdecken sich beide Neutrinenverteilungen, und wegen der in der Grundgleichung postulierten lokalen Neutrinenwechselwirkung ist die Wechselwirkungsenergie der Elektronen proportional zu $\int d^3\mathfrak{r} \frac{1}{r^2} \frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|^\alpha}$. Damit diese Energie, wie es die Experimente der Elektrostatik fordern, mit dem Abstand der Elektronen gemäß 1/a abfällt, wählen wir $\alpha = 2$. Einen Zusammenhang mit den Mehrteilchenwellenfunktionen der Fusionstheorie können wir herstellen, wenn wir diese Neutrinendichte $\frac{1}{r^2}$ zur Berechnung von Korrelationswahrscheinlichkeiten verwenden:

a.) Die gemäß $\frac{1}{r^2}$ verteilte "Neutrinenwolke" bestehe aus zwei Neutrinen, und wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit $W_1$, diese im Abstand a zu finden. Da der "Schwerpunkt" beider Neutrinen im Ursprung liegt, muß das Neutrino 1 einen Abstand a/2 vom

Ursprung haben; damit ist dann aber auch die Lage des zweiten Neutrinos bereits fixiert, und $W_1$ ist deshalb proportional zu $1/a^2$.

b.) Es seien drei Neutrinen vorhanden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $W_2$ befinden sich die Teilchen 2 und 3 im Abstand b und außerdem Teilchen 1 im Abstand a von deren "Schwerpunkt"? Wenn wir den Neutrinen provisorisch eine Masse zuordnen, so haben wir folgendes Bild:




Das Teilchen 1 trägt den Faktor $\frac{1}{(\frac{2a}{3})^2}$ zur Wahrscheinlichkeit $W_2$ bei; danach liegt der "Schwerpunkt" von 2 und 3 fest. Hat nun das Teilchen 2 einen Abstand b/2 von diesem Schwerpunkt und folglich den Abstand $\sqrt{(\frac{a}{3})^2 + (\frac{b}{2})^2}$ vom Ursprung, so ist damit auch Teilchen 3 fixiert, und die Gesamtwahrscheinlichkeit $W_2$ ist proportional zu $\frac{1}{a^2[(\frac{a}{3})^2 + (\frac{b}{2})^2]}$. Das Hauptglied unserer Dreiteilchenfunktion $\psi_{123}(x, \xi)$ sollte also im Ruhsystem asymptotisch die Gestalt aufweisen: $\frac{1}{|\vec{x}|\sqrt{(\frac{1}{3}\vec{x})^2 + (\frac{1}{2}\vec{\xi})^2}}$ (bzw. die entsprechende, in allen Teilchen symmetrische Gestalt),

## §4. Streuprozesse nach der Dreiteilchengleichung.

Neben dem Problem der Fusion von drei Neutrinen zu einem neuen Elementarteilchen, das wir in den ersten drei Abschnitten behandelt haben, kann man auf der Basis der Boppschen Dreiteilchengleichung noch weitere physikalische Prozesse diskutieren: die Streuung von drei Neutrinen aneinander (Dreierstoß), die jedoch uninteressant ist und die Streuung eines Neutrinos an einem gemäß der Zweiteilchengleichung fusionierten Paar.

Für die Streuung von zwei Neutrinen aneinander haben die Rechnungen den Wirkungsquerschnitt Null ergeben [Bopp (1958), Seite 210] doch ist das vielleicht nicht schlimm. Für die Streuung eines Neutrinos an einem fusionierten Paar kann durch die folgenden Rechnungen in Verbindung mit den Teillösungen des vorhergehenden Paragraphen wahrscheinlich gemacht werden, daß das Ergebnis kein so triviales ist.

Der "einlaufende" Zustand, der zu dem Streuprozeß Anlaß geben soll, bestehe aus dem freien Neutrino 1 und dem aus den Neutrinen 2 und 3 fusionierten Paar. Asymptotisch spielt also von den in der Gleichung (1) stehenden drei Wechselwirkungsgliedern nur der Term $\varepsilon^* W_{23}\, \delta(y_2 - y_3)$ eine Rolle, und der einlaufende Zustand muß der Gleichung genügen:

$$(28)\quad (\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3)\,\varphi^{(1)}_{123}(y_1, y_2, y_3) = \varepsilon^* W_{23}\,\delta(y_2 - y_3)\,\varphi^{(1)}_{123}\left(y_1, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

Nach der Variablentransformation

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3} = X\ ;\quad y_1 - \frac{y_2+y_3}{2} = x\ ;\quad y_2 - y_3 = \xi$$

können wir für $\varphi^{(4)}$ den sehr einfachen Ansatz machen:

$$\varphi^{(4)}_{123}(y_1, y_2, y_3) = \varphi_{23}(\xi)\, \varphi_1\, e^{-ik_0 x}\, e^{iPX}$$

worin $e^{iPX}$ die Schwerpunktsbewegung und $e^{ik_0 x}$ die Relativbewegung von Neutrino und fusioniertem Paar beschreiben.
Die Wellengleichung lautet dann:

$$\left[\left(\frac{P}{3}+k_0\right)\gamma_1 + \left(\frac{P}{3} - \frac{k_0}{2} - i\partial_\xi\right)\gamma_2 + \left(\frac{P}{3} - \frac{k_0}{2} + i\partial_\xi\right)\gamma_3\right]\varphi_{23}(\xi)\,\varphi_1 =$$

$$= -i\varepsilon^4 W_{23}\,\delta(\xi)\,\varphi_{23}(0)\,\varphi_1 .$$

Nun ist $P/3+k_0$ der Impuls des freien Neutrinos 1, sodaß die Neutrinogleichung gilt:

$$(29) \qquad \left(\frac{P}{3}+k_0\right)\gamma_1\,\varphi_1 = 0 \quad ; \quad \left(\frac{P}{3}+k_0\right)^2 = 0 .$$

Bezeichnen wir den Schwerpunktsimpuls der Teilchen 2 und 3 mit $K=2P/3-k_0$, so bleibt für $\varphi_{23}(\xi)$ gerade die Zweiteilchengleichung [Bopp (1958), Seite 190]:

$$\left(iK\Gamma_{23} + \bar{\Gamma}_{23}\partial_\xi\right)\varphi_{23}(\xi) = \varepsilon^4 W_{23}\,\delta(\xi)\,\varphi_{23}(0)$$

mit $\bar{\Gamma}_{23}{}^\mu = \gamma_2{}^\mu - \gamma_3{}^\mu$.

Ihre Lösung geben wir in Form der Fouriertransformierten $\tilde{\varphi}_{23}(p) = \int d\xi\, \varphi_{23}(\xi)\, e^{-ip\xi}$ an:

$$(30) \qquad \tilde{\varphi}_{23}(p) = -i\varepsilon^4 \frac{\Gamma_{23}p}{Kp} W_{23}\,\varphi_{23}(0)$$

wobei $\varphi_{23}(0)$ noch der Eigenwertgleichung genügt:

$$\varphi_{23}(0) = -i\frac{K\Gamma_{23}}{K^2} W_{23}\,\varphi_{23}(0)$$

(bzgl. der Ableitung dieser Lösung sei auf die Arbeit von Bopp (1958) und auf Rechnungen in unserem §5 verwiesen).

Damit ist die einfallende Welle völlig bekannt, doch müssen wir noch zu einer symmetrisierten Form übergehen, weil ja physikalisch die drei Neutrinen nicht unterscheidbar sind. Wir wollen uns dabei der Einfachheit halber auf dieselbe Symmetrieklasse 3b (vgl. Seite 23) beschränken, die uns bereits in §2 ausführlich beschäftigte:

$$\varphi_{123}(y_1,y_2,y_3) = e^{iPX}\Big[2\,\varphi_{23}(y_2-y_3)\,\varphi_1\,e^{ik_0(y_1-\frac{y_2+y_3}{2})} - \varphi_{31}(y_3-y_1)\,\varphi_2\,e^{ik_0(y_2-\frac{y_3+y_1}{2})} - \varphi_{12}(y_1-y_2)\,\varphi_3\,e^{ik_0(y_3-\frac{y_1+y_2}{2})}\Big] \tag{31}$$

mit $\varphi_{23}(y_2-y_3) = -\varphi_{32}(y_3-y_2)$ bzw. $\varphi_{23}(0) = -\varphi_{32}(0)$.

Für die Lösung der vollständigen Dreiteilchengleichung machen wir nun den Ansatz:

$$\psi_{123}(y_1,y_2,y_3) = \hat{\psi}_{123}(y_1,y_2,y_3) + \varphi_{123}(y_1,y_2,y_3), \tag{32}$$

setzen sie also zusammen aus der einfallenden Welle $\varphi_{123}(y_1,y_2,y_3)$ und einer Streuwelle $\hat{\psi}_{123}(y_1,y_2,y_3)$, die es nun zu berechnen gilt. $\hat{\psi}_{123}(y_1,y_2,y_3)$ hat der Gleichung zu genügen:

$$\begin{aligned}
&(\gamma_1\partial_1+\gamma_2\partial_2+\gamma_3\partial_3)\,\hat{\psi}_{123}(y_1,y_2,y_3) = \\
&= \varepsilon^4\{w_{23}\delta(y_2-y_3)+w_{31}\delta(y_3-y_1)+w_{12}\delta(y_1-y_2)\}\,\hat{\psi}_{123}(y_1,y_2,y_3) + \\
&+2\varepsilon^4\{w_{31}\delta(y_3-y_1)+w_{12}\delta(y_1-y_2)\}\,\varphi_{23}(y_3-y_1)\,\varphi_1\,e^{ik_0(y_1-\frac{y_2+y_3}{2})}\,e^{iPX} - \\
&-\varepsilon^4\{w_{12}\delta(y_1-y_2)+w_{23}\delta(y_2-y_3)\}\,\varphi_{31}(y_3-y_1)\,\varphi_2\,e^{ik_0(y_2-\frac{y_3+y_1}{2})}\,e^{iPX} - \\
&-\varepsilon^4\{w_{23}\delta(y_2-y_3)+w_{31}\delta(y_3-y_1)\}\,\varphi_{12}(y_1-y_2)\,\varphi_3\,e^{ik_0(y_3-\frac{y_1+y_2}{2})}\,e^{iPX} -
\end{aligned} \tag{33}$$

(die rechte Seite der Gleichung ist dabei so zu verstehen, daß in einer Funktion, die als Faktor hinter $\delta(y_i - y_k)$ steht, $y_i$ wie $y_k$ durch $\frac{y_i + y_k}{2}$ zu ersetzen sind). Außerdem muß $\hat{\varphi}_{123}(y_1, y_2, y_3)$ derselben Symmetrieklasse 3b angehören wie $\varphi_{123}(y_1, y_2, y_3)$.

Wir gehen nun wie in §1 durch Fouriertransformation zu algebraischen bzw. Integral-Gleichungen über:

$$\hat{\varphi}_{123}(y_1, y_2, y_3) = \hat{\varphi}_{123}(x, \xi)\, e^{ipX} = (2\pi)^{-8} \int dk\, dp\, \hat{\varphi}_{123}(k, p)\, e^{i(kx + p\xi + pX)}$$

$$\hat{\chi}^1(k) = (2\pi)^{-4} \int dp\, \hat{\varphi}_{123}(k, p)$$

$$\hat{\chi}^2(k) = (2\pi)^{-4} \int dp\, \hat{\varphi}_{123}(p, k + \tfrac{p}{2})$$

$$\hat{\chi}^3(k) = (2\pi)^{-4} \int dp\, \hat{\varphi}_{123}(p, -k - \tfrac{p}{2}) .$$

$$\tfrac{i}{\varepsilon^4}\left[\left(\tfrac{p}{3} + k\right)\gamma_1 + \left(\tfrac{p}{3} - \tfrac{k}{2} + p\right)\gamma_2 + \left(\tfrac{p}{3} - \tfrac{k}{2} - p\right)\gamma_3\right] \hat{\varphi}_{123}(k, p) =$$

$$= w_{23}\, \hat{\chi}^1(k) + w_{31}\, \hat{\chi}^2\left(p - \tfrac{k}{2}\right) + w_{12}\, \hat{\chi}^3\left(-p - \tfrac{k}{2}\right) +$$

$$+ 2 w_{31}\, \tilde{\varphi}_{23}\left(p - \tfrac{k}{2} + \tfrac{k_0}{2}\right) \varphi_1 + 2 w_{12}\, \tilde{\varphi}_{23}\left(p + \tfrac{k}{2} - \tfrac{k_0}{2}\right) \varphi_1 -$$

$$- w_{12}\, \tilde{\varphi}_{31}\left(\tfrac{k_0}{2} - \tfrac{k}{2} - p\right) \varphi_2 - w_{23}\, \tilde{\varphi}_{31}\left(-k - \tfrac{k_0}{2}\right) \varphi_2 -$$

$$- w_{23}\, \tilde{\varphi}_{12}\left(k + \tfrac{k_0}{2}\right) \varphi_3 - w_{31}\, \tilde{\varphi}_{12}\left(\tfrac{k}{2} - p - \tfrac{k_0}{2}\right) \varphi_3 .$$

Daraus folgt für $\hat{\varphi}_{123}(k, p)$ eine Relation, die formal völlig äquivalent ist der in §1 abgeleiteten Gleichung (5):

$$(34)\quad \hat{\varphi}_{123}(k, p) = i\varepsilon^4 \frac{Z_{123}(k, p)}{N(k, p)} \left\{ w_{23}\, \overline{\chi}^1(k) + w_{31}\, \overline{\chi}^2\left(p - \tfrac{k}{2}\right) + w_{12}\, \overline{\chi}^3\left(-p - \tfrac{k}{2}\right) \right\}$$

mit

$$\overline{\chi^1}(k) = \hat{\chi}^1(k) - \tilde{\varphi}_{31}(-k-\tfrac{k_0}{2})\varphi_2 - \tilde{\varphi}_{12}(k+\tfrac{k_0}{2})\varphi_3$$

$$\overline{\chi^2}(k) = \hat{\chi}^2(k) - \tilde{\varphi}_{12}(-k-\tfrac{k_0}{2})\varphi_3 + 2\tilde{\varphi}_{23}(k+\tfrac{k_0}{2})\varphi_1$$

$$\overline{\chi^3}(k) = \hat{\chi}^3(k) + 2\tilde{\varphi}_{23}(-k-\tfrac{k_0}{2})\varphi_3 - \tilde{\varphi}_{31}(k+\tfrac{k_0}{2})\varphi_2 .$$

Integriert man Gleichung (34) über p, so erhält man die Integralgleichung:

$$\hat{\chi}^1(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4}\int dp\,\frac{Z_{123}(k,p)}{N(k,p)}\Big\{W_{23}\,\overline{\chi^1}(k) + \tag{35}$$
$$+ W_{31}\,\overline{\chi^2}(p-\tfrac{k}{2}) + W_{12}\,\overline{\chi^3}(-p-\tfrac{k}{2})\Big\}$$

und analoge Relationen für $\hat{\chi}^2(k)$ und $\hat{\chi}^3(k)$ (vgl. Gleichung (6)).

Da wir fordern, daß die Integrale im Impulsraum auch bei Streuproblemen nach der Vorschrift von §1 ausgeführt werden (erst bei "räumlichen" Polen, die danach noch auftreten, passen wir die Integration den Randbedingungen für Fusion bzw. Streuung an!), können wir für $\hat{\chi}^i(k)$ nach demselben Verfahren, wie es im Anhang ausgeführt ist, die gebrochen rationale Abhängigkeit vom Argument ableiten, weil ja auch $\tilde{\varphi}_{ke}(k)$ gemäß (30) diese Eigenschaft hat. Wir erhalten dann aus (35):

$$\hat{\chi}^1(k) = i\frac{(\frac{p}{3}+k)\gamma_1(p\Gamma_{23})^2 - (\frac{2p^2}{3}-pk)(p\Gamma_{23})}{\frac{p^4}{3} - 2p^2(pk) + (pk)^2 - p^2k^2}\Big\{W_{23}\big[\hat{\chi}^1(k) - \tag{36}$$
$$- \tilde{\varphi}_{31}(-k-\tfrac{k_0}{2})\varphi_2 - \tilde{\varphi}_{12}(k+\tfrac{k_0}{2})\varphi_3\big] +$$
$$+ W_{31}\big[\hat{\chi}^2 + i\varepsilon^4\frac{p\Gamma_{12}}{pK}W_{12}\varphi_{12}(0)\varphi_3 - 2i\varepsilon^4\frac{p\Gamma_{23}}{pK}W_{23}\varphi_{23}(0)\varphi_1\big]$$
$$+ W_{12}\big[\hat{\chi}^3 - 2i\varepsilon^4\frac{p\Gamma_{23}}{pK}W_{23}\varphi_{23}(0)\varphi_1 + i\varepsilon^4\frac{p\Gamma_{31}}{pK}W_{31}\varphi_{31}(0)\varphi_2\big]\Big\},$$

wo $\hat{\chi}^i = \varepsilon^4(2\pi)^{-4}\int dk\,\hat{\chi}^i(k)$ ist.

Aus dieser Gleichung kann $\hat{\chi}^1(k)$ nach den Methoden von §3 im Prinzip berechnet werden und kann dann zusammen mit $\hat{\chi}^2(k)$ und $\hat{\chi}^3(k)$ in (34) eingesetzt werden, womit wir die Fouriertransformierte $\hat{\Psi}_{123}(k,p)$ der "Streuwelle" vollständig bestimmt hätten. Bei der Übersetzung von $\hat{\Psi}_{123}(k,p)$ in den Ortsraum steht man jedoch vor denselben mathematischen Schwierigkeiten, von denen bereits in §3 die Rede war. Die Lösung einer Teilaufgabe $\hat{\chi}^1(x) = (2\pi)^{-4}\int dk\, \hat{\chi}^1(k) e^{ikx}$ führt wegen der ähnlichen Struktur von (36) und (7) auf Ergebnisse, wie sie bereits in §3 unter Hinweis auf die Streuprozesse diskutiert wurden (nur die in $\tilde{\varphi}_{k\ell}(k+\frac{k_0}{2})$ auftretenden Nenner geben zu geringfügigen Änderungen Anlaß). Da die dort erhaltenen Teilergebnisse noch keine definitiven Schlüsse auf die physikalische Bedeutung der Gesamtfunktion zuließen, wollen wir hier nicht nochmal darauf eingehen, sondern zunächst nur die Schwerpunktsamplitude der "Streuwelle" als Funktion der einfallenden Welle berechnen.
Zu diesem Zweck integrieren wir Gleichung (36) über k. Wegen der Hauptwertvorschrift bzgl. $k_p = \frac{k_P}{p^2}P$ liefert das:

$$2i\,p^4\,\hat{\chi} = (p\Gamma_{23})\left[p^2+(p\Gamma_{23})(p\gamma_1)\right]\Big\{(W_{23}+W_{31}+W_{12})\,\hat{\chi} -$$

$$-2i\,(W_{31}+W_{12})\frac{p\Gamma_{23}}{pK}W_{23}\varphi_{23}(0)\varphi_1 + i(W_{12}+W_{23})\frac{p\Gamma_{31}}{pK}W_{31}\varphi_{31}(0)\varphi_2 + i(W_{23}+W_{31})\frac{p\Gamma_{12}}{pK}W_{12}\varphi_{12}(0)\varphi_3\Big\}.$$

Dabei ist $\hat{\chi}^1 = \hat{\chi}^2 = \hat{\chi}^3 = \hat{\chi}$, wie sich leicht beweisen läßt, wenn man auch die zu (36) äquivalenten Gleichungen für $\hat{\chi}^2(k)$ und $\hat{\chi}^3(k)$ über k integriert.

Da die Lösung der obigen inhomogenen Gleichung für $\hat{\chi}$ noch etwas mühsam wäre, untersuchen wir zuerst die einfachere Gleichung:

$$2i\,p^4\,\chi_{123} = (p\Gamma_{23})\left[p^2+(p\Gamma_{23})(p\gamma_1)\right]\Big\{(W_{23}+W_{31}+W_{12})\,\chi_{123} - \tag{37}$$

$$-2i\,(W_{31}+W_{12})\frac{p\Gamma_{23}}{pK}W_{23}\varphi_{23}(0)\varphi_1\Big\}$$

und haben dann: $\hat{\chi} = \chi_{123} - \frac{1}{2}\chi_{231} - \frac{1}{2}\chi_{312}$.

Wegen des Faktors $(P\Gamma_{23})[P^2 + (P\Gamma_{23})(P\gamma_1)]$ auf der rechten Seite der Gleichung (37) gilt wieder: $(P\gamma_1)\chi_{123} = (P\gamma_2)\chi_{123} = (P\gamma_3)\chi_{123}$. Außerdem folgt aus $\varphi_{23}(0) = -\varphi_{32}(0)$ sofort: $\chi_{123} = -\chi_{132}$, und damit gehört nach Seite 27 nicht nur $\hat{\chi}$ sondern auch $\chi_{123}$ zur Symmetrieklasse 3b.

$\chi_{123} = a v_0 + \frac{P\gamma_1}{P^2} P_\mu a v_1^\mu$ (vgl. Gleichungen (10a) und (12))

$\varphi_{23}(0) = \alpha v_0 - \frac{i\varkappa_0}{K^2} K_\mu \alpha v_1^\mu$ (vgl. Bopp (1958), Gleichung (7.14))

(a ist ein Spinor bzgl. des Teilchens 1, während $\alpha$ ein einfacher Zahlenfaktor ist).

Die Ausführung der Operationen $W_{ik}$ und $(P\Gamma_{23})$ geschieht nach den in §2 bereitgestellten Regeln, und man erhält so für den Spinor a die Bestimmungsgleichung:

$$(iP\gamma_1 \mp M)\, a = 2(\bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1)\left(1 - \frac{i\varkappa_0 P\gamma}{PK}\right)\alpha\varphi_1 ,$$

wo M die Masse des dreifach fusionierten Teilchens ist (vgl. Gleichung (16)). Daraus folgt als expliziter Ausdruck für die Amplitude a:

$$(38) \qquad a = \frac{2(\bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1)}{PK} \cdot \frac{iP\gamma_1 \pm M}{P^2 + M^2}\,(i\varkappa_0 P\gamma_1 - PK)\,\alpha\varphi_1$$

Der Faktor vor $\alpha\varphi_1$ auf der rechten Seite dieser Gleichung hängt sehr eng mit dem Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Neutrinos an einem fusionierten Paar zusammen. Denn die Gleichung (38) kann gemäß $\chi_{123} = a v_0 + \frac{P\gamma_1}{P^2} P_\mu a v_1^\mu$ und $\hat{\chi} = \chi_{123} - \frac{1}{2}\chi_{231} - \frac{1}{2}\chi_{312}$

als Repräsentant dafür aufgefaßt werden, wie die Schwerpunktsamplitude $\hat{\chi}$ der "Streuwelle" (jedenfalls bei der Symmetrieklasse 3b) mit der Amplitude der einfallenden Welle verknüpft ist. Freilich wird dieser vorläufige Wirkungsquerschnitt beim Übergang von der Schwerpunktsamplitude $\hat{\chi}$ zu der vollständigen "Streuwelle" $\hat{\psi}_{123}(k,p)$ bzw. $\hat{\psi}_{123}(y_1,y_2,y_3)$ noch mit zahlreichen (von Winkeln und Relativzeiten abhängigen) Faktoren multipliziert. Die empfindliche Abhängigkeit des Ausdrucks (38) von den beiden Nennern $(P^2+M^2)$ und (PK) bleibt dabei jedoch im wesentlichen erhalten.

$(P^2+M^2)$ ist der erwartete Resonanznenner: wenn der Relativimpuls von Neutrino und fusioniertem Paar gerade einen so großen Wert erreicht hat, daß die Gesamtenergie des Dreiteilchensystems gleich der Masse des dreifach fusionierten Teilchens ist, hat der Wirkungsquerschnitt für die Streuung eine Resonanzstelle.
Um die Abhängigkeit des Nenners (PK) von den physikalischen Meßgrößen sichtbar zu machen, gehen wir ins Schwerpunktssystem $P_\mu=(\alpha,\vec{0})$ und verwenden außerdem die beiden Relationen:

$$\left(\frac{P}{3}+k_0\right)^2=(P-K)^2=0 \qquad \text{(Neutrinomasse = 0)}$$

$$\left(\frac{2P}{3}-k_0\right)^2=K^2=-m^2 \qquad \text{(m = Masse des zweifach fusionierten Teilchens, also } m^2=\varkappa_0\varkappa_1\text{).}$$

Dann gilt:

$$PK=-\frac{1}{3}\left(2m^2+p_0^2+|p_0|\sqrt{p_0^2+m^2}\right), \tag{39}$$

wobei $p_0$ der Relativimpuls der beiden aneinander gestreuten Teilchen ist. Der Nenner PK hat also bei kleinem Relativimpuls $p_0$ einen konstanten Wert und steigt dann mit wachsendem $|p_0|$ erst linear und später quadratisch an.

Es sei jedoch zum Schluß nochmal betont, daß die in diesem Paragraphen abgeleiteten Ergebnisse zum Streuproblem der Dreiteilchengleichung solange rein formalen Charakter haben, bis durch eine wenigstens näherungsweise Berechnung der vollständigen Wellenfunktion $\psi_{123}(y_1, y_2, y_3)$ bewiesen werden kann, daß es Lösungen vom Typ einer auslaufenden Kugelwelle gibt.

## §5. Zur Interpretation von Mehrzeitfunktionen.

Um die Boppsche Elementarteilchentheorie weiter ausbauen zu können und eine endgültige Entscheidung über ihre Brauchbarkeit zur Beschreibung der Experimente herbeizuführen, scheinen uns zwei Aufgaben besonders vordringlich und kritisch zu sein: die Entwicklung einer geeigneten Rechenmethode, die auch bei den Dreiteilchen- und Mehrteilchengleichungen zu expliziten (ev. Näherungs-) Lösungen führt und die Aufklärung der physikalischen Bedeutung von mehreren Zeitvariablen in einer relativistischen Quantentheorie.

Wir möchten deshalb in unserem letzten Abschnitt noch einige Anmerkungen zu dem zweiten dieser Probleme zusammenstellen. Es handelt sich dabei nicht um beweisbare, endgültige Ergebnisse, sondern wir diskutieren zunächst die diesbezüglichen Arbeiten aus der Literatur, um diese dann mit Interpretationsmöglichkeiten zu vergleichen, die durch die Ergebnisse der Boppschen Zwei- und Dreiteilchengleichung nahegelegt werden.

Nachdem Dirac 1932 in seiner Neufassung der Quantenelektrodynamik erstmals von mehrzeitigen Wellenfunktionen Gebrauch gemacht hatte und auch schon genaue Vorstellungen über deren Wahrscheinlichkeitsinterpretation entwickelt hatte [Dirac (1933)], führte Bloch (1934) diese Ideen mathematisch aus. Der Ausgangspunkt sind dabei die quantenelektrodynamischen Grundgleichungen in der Diracschen (Wechselwirkungs-) Darstellung:

I. Die freien Feldgleichungen und Vertauschungsrelationen für die elektromagnetischen Potentiale:

$$\Box A_\mu = 0 \; ; \quad [A_\mu(x), A_\nu(x')] = -i\,\delta_{\mu\nu}\,D(x-x') \, ,$$

II. Die dynamischen Gleichungen für die Materieteilchen (Ladung $e_n$, Geschwindigkeit $v_n$) im elektromagnetischen Feld (vorerst nicht-relativistisch):

$$\{H_n - i\,\partial_{t_n}\}\,\psi = 0\,,$$

mit $H_n = -\frac{1}{2m}\nabla_n + e_n[\phi(x_n) - v_n A(x_n)]$.

$(n = 1,2,\ldots,N)$

III. Die Nebenbedingung an den Zustandsvektor $\psi$:

$$\{\partial_\mu A^\mu - \sum_n e_n D(x-x_n)\}\,\psi = 0\,.$$

Damit diese Gleichungen eine simultane Lösung $\psi(x; x_1, \ldots x_N)$ haben, muß gelten:

$$(40) \qquad [H_n, H_{n'}]\,\psi = -i e_n e_{n'}(1 - v_n v_{n'})\,D(x_n - x_{n'})\,\psi = 0$$

(andernfalls wäre $\frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_{n'}}\psi \neq \frac{\partial^2}{\partial t_{n'} \partial t_n}\psi$ ).

Diese grundlegende Bedingung (40) an $\psi$ wird nun bei Bloch folgendermaßen ausgewertet: Es ist nicht etwa so, daß $\psi$ auf allen Lichtkegeln $(x_n - x_{n'})^2 = 0$ (auf denen allein $D(x_n - x_{n'})$ nicht Null ist) verschwinden muß, sondern zunächst werden beliebige Lösungen von I, II, III zugelassen; eine einheitliche physikalische Interpretation ist jedoch jeweils nur in einem einzigen von solchen Lichtkegeln begrenzten Raum-Zeit-Bereich möglich, während die Lösungen in verschiedenen Bereichen über die "verbotenen" Lichtkegel unendlich vieldeutig miteinander zusammenhängen. Die endgültige Einschränkung einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation für $\psi(x; x_1, \ldots x_N)$ auf den speziellen Bereich $\{(x_n - x_{n'})^2 > 0\,;\ (x - x_n)^2 > 0\}$ wird dadurch nahegelegt, daß man einerseits einen eindeutigen Anschluß an die einzeitigen Theorien wünscht und außerdem auch mit anderen als

elektromagnetischen Wechselwirkungen gerechnet werden muß, die sich dann mit Unterlichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Diese von Bloch ausgearbeitete Deutung einer Mehrzeitfunktion - $\psi^{+}(x_1, t_1; \ldots x_n, t_n) O \psi(x_1, t_1, \ldots x_n, t_n)$, mit einem nicht näher bestimmten Spinoperator O, ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen 1 zur Zeit $t_1$ am Ort $x_1$, . . . . und das Teilchen n zur Zeit $t_n$ am Ort $x_n$ zu finden, falls alle Meßpunkte raumartig zueinander liegen - erscheint so natürlich, daß man geneigt ist, sie ganz allgemein zur Grundlage von Mehrzeittheorien zu machen, selbst wenn diese in Einzelheiten stark von der Diracschen Quantenelektrodynamik abweichen. Tatsächlich wird in der Literatur fast ausschließlich auf die Blochsche Deutung zurückgegriffen, ohne freilich bisher auf ihrer Basis zu einer konsistenten Theorie gelangt zu sein, die auf Probleme der Elementarteilchenphysik erfolgreich angewendet werden könnte.

Die kovariante Quantenelektrodynamik von Schwinger (1948) ist zwar ursprünglich aus der Mehrzeittheorie hervorgegangen [Tomonaga (1946)] und enthält im Prinzip alle Informationen, die wir von einer Mehrzeittheorie erwarten, doch sind die Fragestellungen in ihr meist ganz andere als sie in unserem Zusammenhang interessieren. Der von Salpeter, Bethe (1951) angestellte Versuch, im Rahmen der Schwingerschen Theorie die Bindung von zwei Teilchen relativistisch zu beschreiben, hat für das Verständnis von Mehrzeittheorien keine wesentlichen Fortschritte gebracht, ja es wurden paradoxerweise die einzigen greifbaren Ergebnisse im Rahmen nichtrelativistischer Näherungen erhalten.

Eine für das Verständnis von Mehrzeittheorien besonders wichtige Frage ist die nach der Definition von Mittelwerten physikalischer Größen und nach dem Zusammenhang zwischen Invarianzeigenschaften und Erhaltungssätzen. Während in den Arbeiten zur Diracschen Mehrzeittheorie und zur Bethe-Salpetergleichung dieses Problem gar nicht behandelt wird, haben Bopp (1958) und Rinke (1961) einige vorläufige Ergebnisse in dieser Richtung erzielt, eine endgültige Klärung des Fragenkomplexes steht jedoch noch aus.
Dagegen sollte die Normierung einer Wellenfunktion $\psi(x_1,t_1;\ldots x_n,t_n)$ in der Form

$$\int dx_1 \ldots dx_n \, \psi^+(x_1,T;\ldots x_n,T)\,\sigma\,\psi(x_1,T;\ldots x_n,T) = n \,,$$

von der auch in der Literatur meist Gebrauch gemacht wird, keinen wesentlichen Bedenken ausgesetzt sein. Sie drückt aus, daß man bei gleichzeitigen Messungen im ganzen Raum mit Sicherheit n Teilchen vorfindet. Die Integration über die 3n räumlichen Koordinaten kann vermutlich durch eine Integration über eine beliebige 3n-dimensionale Mannigfaltigkeit (Hyperfläche) ersetzt werden, auf der je zwei Punkte $x_i$ und $x_k$ raumartig liegen; dagegen ist eine 4n-dimensionale Integration prinzipiell auszuschließen, weil sie notwendig auch nichtinterpretierbare Bereiche von $\psi$ überstreicht, während doch die Festlegung des Normierungswertes n einer Wahrscheinlichkeitsdeutung entspringt. Der Normierungswert n muß von dem speziellen Zeitpunkt T der Messung unabhängig sein. Das ist für Lösungen, deren Schwerpunktsbewegung durch eine ebene Welle beschrieben wird, trivialerweise erfüllt; bei Überlagerungen von solchen Funktionen müssen die T-abhängigen Interferenzterme auf Grund der räumlichen Integration verschwinden.

Daß in das oben definierte Normierungsintegral nur solche Argumente von $\psi$ eingehen und eingehen dürfen, die auf einer "raumartigen Hyperfläche" liegen, ist Ausdruck der ganz allgemeinen Vorstellung, daß die Lösungen einer mehrzeitigen Gleichung bereits durch ihre Werte auf einer raumartigen Hyperfläche eindeutig bestimmt sein müssen. Andernfalls würde die Mehrzeittheorie neue, vermutlich unphysikalische "Informationen" enthalten, die die einzeitige Quantenfeldtheorie nicht liefern kann.

Sollen die Boppschen Gleichungen diese Vorstellung verwirklichen, so dürfen z.B. die stationären Fusionslösungen nur in einer solchen Weise von den Relativzeiten $\tau_i$ abhängen, daß die Erwartungswerte von $\tau_i$ unabhängig sind; denn wenn wir etwa in einer "Neutrinenwolke" zur Zeit $t_1$ am Ort $r_1$ ein Teilchen messen, so muß die Meßwahrscheinlichkeit für ein zweites Neutrino am Ort $r_2$ unabhängig davon sein, ob die zweite Messung früher, gleichzeitig oder später stattfindet als die erste, sofern nur beide Messungen kommensurabel sind (die Meßpunkte raumartig liegen).

Diese Eigenschaft ist bei den Lösungen der Zweiteilchengleichung und nach den bisherigen Ergebnissen auch bei denen der Dreiteilchengleichung nicht unmittelbar gegeben. Im Gegenteil kann man an der rationalen Gestalt der Fouriertransformierten sofort ablesen, daß die Funktionen bei Gleichzeitigkeit ein ganz besonderes, singuläres Verhalten zeigen. Nun liegt aber ein Punkt $(x_1, \ldots x_n)$, für den ein $\tau_i = 0$ ist, automatisch in einem (nach Bloch) nicht interpretierbaren Bereich bzw. auf dem Rande des "Interpretationsgebietes", sodaß die $\delta$-artigen Singularitäten von $\psi(x_1, \ldots x_m)$ bei $\tau_i = 0$ der obigen Vorstellung über Mehrzeittheorien noch nicht unbedingt zu widersprechen brauchen.

Leider konnten wir für den Fall, daß alle Relativzeiten von Null verschieden sind, wegen der mathematischen Komplexheit des Problems bisher noch keine Lösung der Dreiteilchengleichung berechnen. Erfüllen diese Lösungen aber tatsächlich die Bedingung, von $\tau_i$ (weitgehend) unabhängig zu sein, so möchten wir für ihre Interpretation die folgende Hypothese aufstellen: Im Fall, daß alle $\tau_i \neq 0$ sind, erfolgt die Wahrscheinlichkeitsdeutung genau nach dem Blochschen Vorschlag; der Anschluß an einzeitige Theorien muß aber durch den Grenzübergang von der Mehrzeitigkeit her erfolgen, weil die Lösungen der Boppschen Gleichungen bei $\tau_i = 0$ unstetig sind.

Es ist besonders reizvoll, die Boppsche Fusionslösung des Zweiteilchenproblems unter diesem Aspekt nochmal genauer zu untersuchen: Zunächst kann man an der Lösung der Zweiteilchengleichung im Impulsraum

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{i\,\varepsilon^4}{4\Omega\,\omega}(K\bar{\Gamma}+4+4\Gamma)W\psi(0) \quad \text{mit} \quad \psi(0) = -i\frac{K\Gamma}{K^2}W\psi(0)$$

(vgl. Bopp (1958), Gleichungen (6.6) und (6.10))
noch eine Vereinfachung anbringen: wir wollen nämlich beweisen, daß $(K\bar{\Gamma})\,W\,\psi(0)$ Null ist. Dazu "schieben" wir die Operatoren $(K\gamma_i)$ durch die Matrix W durch; aus den Vertauschungsrelationen zwischen den Diracschen $\gamma$-Matrizen zusammen mit der aus der Eigenwertgleichung für $\psi(0)$ folgenden Relation $(K\gamma_1)\psi(0) = (K\gamma_2)\psi(0)$ ergibt sich:

$$(K\gamma_1)\,W\,\psi(0) =$$

$$= (K\gamma_1)\left[\bar{x}_0\, 1\times 1 + \bar{x}_1\,\gamma^\mu\times\gamma_\mu + \tfrac{1}{2}\bar{x}_2\,\gamma^{\mu\nu}\times\gamma_{\mu\nu} + \bar{x}_3\,\gamma^{5\mu}\times\gamma_{5\mu} + \bar{x}_4\,\gamma^5\times\gamma_5\right]\psi(0)$$

$$= \left[(\bar{x}_0 + 2\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2)\,1\times 1 + (2\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\,\gamma^\mu\times\gamma_\mu + \tfrac{1}{2}\bar{x}_2\,\gamma^{\mu\nu}\times\gamma_{\mu\nu} + \bar{x}_3\,\gamma^{5\mu}\times\gamma_{5\mu}\right.$$

$$\left. + (\bar{x}_4 + 2\bar{x}_3)\,\gamma^5\times\gamma_5\right](K\gamma_1)\psi(0).$$

Genau dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir $(K\gamma_1)$ durch $(K\gamma_2)$ ersetzen. Die Subtraktion beider Relationen liefert dann den Beweis für obige Behauptung. Die Fusionslösung der Boppschen Zweiteilchengleichung hat damit die Form:

$$(41)\quad \psi(\xi) = \varepsilon^4 \left\{ \delta^4(\xi) - \frac{i}{1-K^2}\, \eta\left(\frac{K\xi}{K^2}\right)(\vec{\Gamma}\partial_{\vec{\xi}})\, \delta^3(\vec{\xi})\, W \right\} \psi(0),$$

wobei $\vec{\Gamma}$ und $\vec{\xi}$ in einem beliebigen Lorentzsystem die zu K orthogonalen Anteile von $\Gamma^\mu$ und $\xi^\mu$ bezeichnen, im Fall $K = (\Omega,0,0,0)$ sind sie mit den räumlichen Vektoren identisch.

Wie bereits in §1 erwähnt wurde, liegen die zur $\eta$-Funktion proportionalen Terme der Lösung (41) außerhalb des Interpretationsgebietes, die vierdimensionale $\delta$-Funktion $\delta^4(\xi)$ liegt auf dem Rand dieses Gebietes. Wie sollen wir dieses Ergebnis interpretieren? Zunächst drückt die Lösung (41) aus, daß die Messung zweier Neutrinen an verschiedenen Orten unter allen Umständen ein negatives Ergebnis hat. Der danach allein noch in Frage kommende "Meßpunkt" $\xi = 0$ (Beobachtung beider Neutrinen zur selben Zeit am selben Ort) liegt am Rande des Interpretationsgebietes, wo eine Deutung wegen der oben erwähnten Unstetigkeit aller Lösungen fragwürdig wird. Wir wollen deshalb die folgende "Deutung" des Ergebnisses (41) vorschlagen: Es ist nicht mehr angemessen, von einer Beobachtung zweier einzelner Neutrinen zu sprechen, sondern beide Neutrinen bilden einen streng lokalisierten Verband (ein neues Teilchen), der nur als Ganzes beobachtet werden kann.

Von einem gewissen Interesse scheint uns noch zu sein, daß der Spinoperator O in der Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^+(w_1,t_1;w_2,t_2)\,O\,\psi(w_1,t_1;w_2,t_2)$ (vgl. Seite 63) in natürlicher Weise so festgelegt werden kann, daß die zur $\eta$-Funktion proportionalen Terme von (41) keinen Beitrag liefern. Diese Terme liegen zwar ohnehin in einem nicht-interpretierbaren Bereich, doch wäre es sehr befriedigend, wenn man es einrichten könnte, daß nichtinterpretierbare Funktionen ganz allgemein die Wahrscheinlichkeit Null ergeben.
Wir setzen also $O = \Gamma_4$, sodaß in der Wahrscheinlichkeitsdichte gemäß (41) Ausdrücke stehen wie:

$$(W\psi(0))^+ \Gamma^{i+} \Gamma_4 \Gamma^k (W\psi(0)) \quad (i,k=1,2,3)$$

Bei ruhendem Schwerpunkt hat $W\psi(0)$ die Gestalt [Bopp (1958), §7]:

$$W\psi(0) = x_0\, a\, v_0 + \frac{i x_0 x_1}{\Omega}\, a\, v_1^{\circ} - \frac{i x_1 x_3}{\Omega}\, d_i\, \tilde{v}_2^{\circ i} + x_3\, d_i\, v_3^{i},$$

und bei Berechnung des obigen Ausdrucks nach der Regel (11) erhält man Null.

Zum Schluß möchten wir noch auf eine Zusatzbedingung zu sprechen kommen, mit deren Hilfe man erzwingen kann, daß die Lösungen der Zweiteilchengleichung unabhängig von der Relativzeit $\tau$ werden: Die Wellenfunktion $\psi(x_1, x_2)$ soll neben der Boppschen Wellengleichung noch der Gleichung genügen:

$$(42) \qquad (\partial_{1\mu}\partial^{1\mu} - \partial_{2\mu}\partial^{2\mu})\,\psi(x_1, x_2) = 0$$

(eine entsprechende Verallgemeinerung auf mehr als zwei Teilchen liegt auf der Hand).

Für Lösungen, deren Schwerpunktsbewegung sich abseparieren läßt, folgt daraus unmittelbar:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(\xi)\, e^{iPx} \qquad (P\partial_\xi)\,\psi(\xi) = 0$$

Das ist dann im Fall P = ($\Omega$,0,0,0) identisch mit

$$\partial_\tau\, \psi(\vec{\xi}, \tau) = 0$$

Trotz dieser im Hinblick auf die Wahrscheinlichkeits-Interpretation sehr erwünschten Eigenschaft der Nebenbedingung (42) scheint sie uns doch im Rahmen einer dynamischen Fusionstheorie unbrauchbar zu sein. Denn wie die Rechenergebnisse gezeigt haben, erfüllen die Lösungen der Boppschen Zwei- (und ebenso der Drei-) Teilchengleichung die Nebenbedingung der Relativzeitunabhängigkeit nicht.
Damit die Relation (42) mit der Wellengleichung verträglich ist (die entsprechenden Operatoren, die auf $\psi$ wirken, vertauschbar sind), muß also notwendig das "Potential" V in der Boppschen Wellengleichung

$$(\gamma_1^\mu \partial_{1\mu} + \gamma_2^\mu \partial_{2\mu})\,\psi(x_1, x_2) = V(x_1, x_2)\,\psi(x_1, x_2)$$

[Bopp (1958), Gleichung (4.3)] abgeändert werden.
Im einzelnen folgt aus der Kommutatorbedingung $[\partial^{1\mu}\partial_{1\mu} - \partial^{2\mu}\partial_{2\mu}, V] = 0$ und bei einem nur von der Relativkoordinate abhängigen Potential $V(\xi)$: $\partial_{\xi\mu}\, V(\xi)\, \partial_{x}{}^{\mu} = 0$, d.h. bei reinen Schwerpunktswellen:

$$(P\partial_\xi)\, V(\xi) = 0 .$$

Es ist aber nicht einzusehen, wieso die Wechselwirkung der "Urteilchen" von der Schwerpunktsbewegung des ganzen Systems abhängen soll. (Z.B. dürfte bei ruhendem Schwerpunkt das Potential V nicht von der Relativzeit $\tau$ abhängen, die Wechselwirkung zwischen zwei Neutrinen am Ort $\mathfrak{r}$ müßte also davon unabhängig sein, ob sich beide Teilchen gleichzeitig dort treffen oder ob Neutrino 2 erst zu einem Zeitpunkt dorthin kommt, zu dem Neutrino 1 schon wieder "weggelaufen" ist.)

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. F. Bopp möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche fördernde Diskussionen aufrichtig danken.

## Anhang.

Wir wollen das folgende Integralgleichungssystem untersuchen:

$$(6.1)\quad \chi^1(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\!\!\!\!- dp\, \frac{Z_{123}(k,p)}{N(k,p)} \left\{ W_{23}\chi^1(k) + W_{31}\chi^2(p-\tfrac{k}{2}) + W_{12}\chi^3(-p-\tfrac{k}{2}) \right\}$$

$$(6.2)\quad \chi^2(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\!\!\!\!- dp\, \frac{Z_{231}(k,p)}{N(k,p)} \left\{ W_{31}\chi^2(k) + W_{12}\chi^3(p-\tfrac{k}{2}) + W_{23}\chi^1(-p-\tfrac{k}{2}) \right\}$$

$$(6.3)\quad \chi^3(k) = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\!\!\!\!- dp\, \frac{Z_{312}(k,p)}{N(k,p)} \left\{ W_{12}\chi^3(k) + W_{23}\chi^1(p-\tfrac{k}{2}) + W_{31}\chi^2(-p-\tfrac{k}{2}) \right\}$$

mit den auf den Seiten 14 und 15 angegebenen Ausdrücken für Z(k,p) und N(k,p). Dabei soll zuerst über die Komponente $p_p = \frac{pP}{P^2}P$ von p integriert werden, die parallel dem Schwerpunktsimpuls P ist, und es soll der Hauptwert genommen werden. Man kann dann jeweils den ersten Summanden der rechten Seite ausintegrieren: Sowohl Z(k,p) als N(k,p) sind Polynome 2. Grades in $p_p$, von denen wegen der Hauptwertintegration nur die höchsten Potenzen betrachtet werden brauchen; das ergibt z.B. bei der Gleichung (6.1):

$$i(P\Gamma_{23})\, \frac{(P\Gamma_{23})(\frac{P}{3}+k)\gamma_1 - (\frac{2P^2}{3} - Pk)}{\frac{P^4}{3} - 2P^2(Pk) + (Pk)^2 - P^2k^2}\, W_{23}\chi^1(k)\ .$$

Multipliziert man nun die Gleichung (6.1) mit dem Operator $(P\Gamma_{23})(\frac{P}{3}+k)\gamma_1 + (\frac{2P^2}{3} - Pk)$, so erhält man mit den Abkürzungen:

$$\int 1 = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\!\!\!\!- dp\, \frac{Z_{123}(k, p+\frac{k}{2})}{N(k, p+\frac{k}{2})}\, W_{31}\chi^2(p)$$

$$\int 2 = i\varepsilon^4(2\pi)^{-4} \int\!\!\!\!\!\!- dp\, \frac{Z_{123}(k, -p-\frac{k}{2})}{N(k, -p-\frac{k}{2})}\, W_{12}\chi^3(p)$$

die folgende Gleichung:

$$\left[(p\Gamma_{23})(\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1+(\tfrac{2p^2}{3}-pk)+i(p\Gamma_{23})W_{23}\right]\chi^1(k) =$$

$$=\left[(p\Gamma_{23})(\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1+(\tfrac{2p^2}{3}-pk)\right](\Sigma 1+\Sigma 2)\,.$$

Da man das Inverse des Operators auf der linken Seite nicht unmittelbar explizit angeben kann, spalten wir diese Gleichung nach den Spinorkomponenten auf (Bezeichnungsweise siehe Seite 28):

$$\chi^1(k) = A v_0 + B_\mu v_1^\mu - \tfrac{1}{2}\tilde{c}_{\mu\nu} v_2^{\mu\nu} + D_\mu v_3^\mu + E v_4$$

$$(\Sigma 1+\Sigma 2) = a v_0 + b_\mu v_1^\mu - \tfrac{1}{2} c_{\mu\nu} v_2^{\mu\nu} + d_\mu v_3^\mu + e v_4\,.$$

Man erhält dann für die Spinorkomponenten einzeln die Gleichungen:

I. $(\frac{2p^2}{3}-pk)A+\left[(\frac{p}{3}+k)\gamma_1+ix_1\right](pB) = (\frac{2p^2}{3}-pk)a+(\frac{p}{3}+k)\gamma_1(pb)$

II. $(\frac{2p^2}{3}-pk)B_\mu+\left[(\frac{p}{3}+k)\gamma_1+ix_0\right]p_\mu A = (\frac{2p^2}{3}-pk)b_\mu+(\frac{p}{3}+k)\gamma_1 p_\mu a$

III. $(\frac{2p^2}{3}-pk)\tilde{c}_{\mu\nu}+\left[(\frac{p}{3}+k)\gamma_1+ix_3\right](p_\nu D_\mu-p_\mu D_\nu) = (\frac{2p^2}{3}-pk)\tilde{c}_{\mu\nu}+(\frac{p}{3}+k)\gamma_1(p_\nu d_\mu-p_\mu d_\nu)$

IV. $(\frac{2p^2}{3}-pk)D_\mu+\left[(\frac{p}{3}+k)\gamma_1+ix_2\right]p_\varrho\tilde{c}_\mu^{\ \varrho} = (\frac{2p^2}{3}-pk)d_\mu+(\frac{p}{3}+k)\gamma_1 p_\varrho\tilde{c}_\mu^{\ \varrho}$

V. $(\frac{2p^2}{3}-pk)E = (\frac{2p^2}{3}-pk)e\,.$

Von diesen Gleichungen werden nun die ersten beiden zur Berechnung von A herangezogen:

Aus II folgt nach Multiplikation mit $p^\mu$:

$$(pB) = (pb)+\frac{p^2}{\frac{2p^2}{3}-pk}\left[-\left((\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1+ix_0\right)A+(\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1 a\right].$$

Damit liefert dann I:

$$\left[(\tfrac{2p^2}{3}-pk)^2-p^2\left((\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1+ix_0\right)\left((\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1+ix_1\right)\right]A = \left[(\tfrac{2p^2}{3}-pk)^2-p^2(\tfrac{p}{3}+k)^2\right]a-$$

$$-ix_1\left[p^2(\tfrac{p}{3}+k)\gamma_1 a+(\tfrac{2p^2}{3}-pk)(pb)\right].$$

Nach weiteren geeigneten Umformungen erhält man daraus:

$$A = \frac{(\frac{2p^2}{3} - p_4)^2 - p^2[(\frac{p}{3}+k)^2 - x_0 x_1] + i(x_0+x_1)p^2(\frac{p}{3}+k)\gamma_1}{[(\frac{2p^2}{3} - p_4)^2 - p^2((\frac{p}{3}+k)^2 - x_0 x_1)]^2 + (x_0+x_1)^2 p^4 (\frac{p}{3}+k)^2} \Big\{ [(\frac{2p^2}{3} - p_4)^2 -$$

$$- p^2(\frac{p}{3}+k)^2 - i x_1 p^2(\frac{p}{3}+k)\gamma_1] a - i x_1 (\frac{p^2}{3} - p_4)(p_6) \Big\} .$$

Ganz ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die anderen Komponenten, sodaß man für $\chi^1(k)$ die folgende Gestalt hat:

$$\chi^1(k) = R^1(k)(\int 1 + \int 2) ,$$

wo der Operator $R^1(k)$ in k rational vom 4. Grad ist.
Da die Gleichungen (6.2) und (6.3) in der Form völlig mit (6.1) übereinstimmen, gilt mit analogen Abkürzungen:

$$\chi^2(k) = R^2(k)(\int 3 + \int 4) ; \quad \chi^3(k) = R^3(k)(\int 5 + \int 6) .$$

Wir beweisen nun speziell für $\int 1$ , daß es rational von k abhängt, indem wir darin für $\chi^2(p)$ nach Art einer Iteration den Ausdruck $R^2(p)(\int 3 + \int 4)$ einsetzen:

$$\int 1 = - \varepsilon^8 (2\pi)^{-8} \int\int dp\, dq \, \frac{Z_{123}(k, p+\frac{q}{2})}{N(k, p+\frac{q}{2})} W_{31} R^2(p) \Big[ \frac{Z_{231}(p, -q-\frac{p}{2})}{N(p, -q-\frac{p}{2})} \cdot$$

$$\cdot W_{12} \chi^1(q) + \frac{Z_{231}(p, q+\frac{p}{2})}{N(p, q+\frac{p}{2})} W_{12} \chi^3(q) \Big] .$$

Hier kann man die Hauptwertintegration über p ausführen, weil der Integrand rational von p abhängt und bekommt das Ergebnis, daß $\int 1$ (und ebenso $\int 2, \ldots . \int 6$ )rational von k abhängt. Gemäß der Darstellung $\chi^1(k) = R^1(k)(\int 1 + \int 2)$ hängt dann auch $\chi^1(k)$ (und ebenso $\chi^2(k)$ und $\chi^3(k)$ ) rational vom Argument ab, und zwar derart, daß Zähler und Nenner gleichen Grad in k haben.

## Literaturverzeichnis.

F. L. Bauer: Zs. Natf. 4a, 720 (1949)

R. Becker, G. Leibfried: Zs. Phys. 125, 347 (1949)

F. J. Belinfante: Physica 6, 849 und 870 (1939a,b)

F. Bloch: Phys. Zs. d. Sowj. 5, 301 (1934)

F. Bopp: Sitzb. d. Bay. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl. 1958,S. 167

L. de Broglie: Compt. Rend. 195, 536 (1932); vgl. L. de Broglie: Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion); Gauthier-Villars, Paris, 1943

" " Compt. Rend. 197, 1377 (1933)

P. A. M. Dirac: Proc. Roy. Soc. A114, 243 und 710 (1927a,b)

" " Zs. Phys. 44, 585 (1927c)

" " Proc. Roy. Soc. A136, 453 (1932)

" " Phys. Zs. d. Sowj. 3, 64 (1933)

P. A. M. Dirac, V. Fock, B. Podolsky: Phys. Zs. d. Sowj. 2, 468 (1932

H.-P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder, K. Yamazaki: Zs. Natf. 14a, 441 (1959)

F. J. Dyson: Phys. Rev. 91, 1543 (1953)

A. S. Eddington: Proc. Roy. Soc. A121, 524 (1928)

" " Proc. Roy. Soc. A122, 358 (1929)

V. Fock: Zs. Phys. 75, 622 (1932)

W. H. Furry, J. R. Oppenheimer: Phys. Rev. 45, 245 (1934)

L. Gårding, A. S. Wightman: Proc. Nat. Acad. Sci. 40, 617 und 622 (1954a,b)

M. Günther: Phys. Rev. 88, 1411 (1952)

R. Haag: Dan. Mat. Fys. Medd. 29, Nr. 12 (1955)

D. Hall, A. S. Wightman: Dan. Mat. Fys. Medd. 31, Nr. 5 (1957)

W. Heisenberg, W. Pauli: Zs. Phys. 56, 1 (1929)

H. Hönl, H. Boerner: Zs. Natf. 5a, 353 (1950)

L. van Hove: Physica 18, 145 (1952)

F. Hund: Materie als Feld; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954

E. Jahnke, F. Emde, F. Lösch: Tafeln höherer Funktionen; Teubner-Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960

P. Jordan: Zs. Phys. 93, 464 (1935)

" " Zs. Phys. 98, 709 und 759 (1936a,b)

" " Zs. Phys. 99, 109 (1936c)

P. Jordan, O. Klein: Zs. Phys. 45, 751 (1927)

G. Källén: Helv. Phys. Acta 25, 417 (1952)

W. Królikowski, J. Rzewuski: Nuov. Cim. 2, 203 (1955)

R. de L. Kronig: Physica 2, 491, 854 und 968 (1935a,b,c)

" " Physica 3, 1120 (1936)

L. Landau, R. Peierls: Zs. Phys. 62, 188 (1930)

" " Zs. Phys. 69, 56 (1931)

H. Lehmann: Nuov. Cim. 11, 342 (1954)

H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann: Nuov. Cim. 1, 205 (1955)

J. K. Lubanski: Physica 9, 310 und 325 (1942a,b)

Y. Nambu: Progr. Theor. Phys. 5, 614 (1950)

E. Neuburger: Diplomarbeit, München 1960

F. Oberhettinger: Tabellen zur Fouriertransformation; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957

W. Pauli: Ann. Inst. Poincaré 6, 137 (1936)

" " Phys. Rev. 58, 716 (1940)

" " Private Mitteilung an H. A. Kramers (1942); vgl. Lubanski (1942a)

W. Pauli, V. Weißkopf: Helv. Phys. Acta 7, 709 (1934)

M. H. L. Pryce: Zs. Phys. 105, 127 (1937)

" " Proc. Roy. Soc. A165, 247 (1938)

M. Rinke: Diplomarbeit, München 1961

E. E. Salpeter, H. A. Bethe: Phys. Rev. 84, 1232 (1951)

K. Schmidt, K. Baumann: Nuov. Cim. 4, 860 (1956)

C. Schmieden, D. Laugwitz: Math. Zs. 69, 1 (1958)

J. Schwinger: Phys. Rev. 74, 1439 (1948)

A. Sokolow: Phys. Zs. d. Sowj. 12, 148 (1937)

W. Thirring: Zs. Natf. 5a, 85 (1950)

S. Tomonaga: Progr. Theor. Phys. 1, 27 (1946)

G. Wentzel: Zs. Phys. 86, 479 und 635 (1933a,b)

" " Zs. Phys. 92, 337 (1934)

A. S. Wightman: Phys. Rev. 101, 860 (1956)

" " Colloques Internationaux du CNRS, Lille (1957)

A. S. Wightman, S. S. Schweber: Phys. Rev. 98, 812 (1955)

G. C. Wick: Phys. Rev. 96, 1124 (1954)

## Lebenslauf.

Ich wurde am 10. März 1936 als Sohn des Bankkaufmanns Gottfried Pfister und seiner Ehefrau Maria, geb. Stürzer, in München geboren.

Vom Herbst 1942 an besuchte ich die Volksschulen in München an der Simmernstraße, in Schönau bei Bad Aibling, Oberding bei Erding und Icking im Isartal. Im September 1946 trat ich in die Oberschule Icking ein, wechselte dann im Jahre 1950 an die Maria-Theresia-Oberrealschule in München und legte dort 1954 die Reifeprüfung ab.

Seit dem Wintersemester 1954/55 studiere ich an der Universität München Mathematik und Physik. Ich hörte Vorlesungen u.a. bei G. Aumann, F. Bopp, A. Faessler, W. Gerlach, R. Haag, W. Heisenberg, G. Höhler, H. Koppe, G. Lüders, W. Maak, W. Rollwagen, A. Schlüter, F. Schmeidler, W. Stegmüller und P. Wellmann.

Im Herbst 1958 bestand ich das Staatsexamen für das Lehramt an Höheren Schulen in Bayern. Anschließend begann ich am Institut für Theoretische Physik mit meiner Doktorarbeit. Vom Mai 1957 bis Juli 1960 war ich Hilfsassistent am Mathematischen Institut, vom November 1958 bis März 1962 am Institut für Theoretische Physik. Seit 1. April 1962 verwalte ich an diesem Institut eine wissenschaftliche Assistentenstelle.

München, April 1962

Herbert Pfister